ΤΑΞΗ: **3η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ.**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

Ημερομηνία: Τετάρτη 19 Απριλίου 2023
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. **Σχολικό βιβλίο σελίδα 28**

Α2. **Σχολικό βιβλίο σελίδα 87**

Α3. **1 (γ) 2 (α)**

Α4. **(α) Σωστό (β)Λάθος (γ)Λάθος (δ)Λάθος (ε)Λάθος**

ΘΕΜΑ Β

Β1. Από τα δεδομένα προκύπτει ότι $f'(2) = -1$

Έχουμε $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \alpha x^2 + 3x - \frac{1}{3}$ άρα $f'(x) = x^2 - 2\alpha x + 3$

Οπότε $f'(2) = -1 \Leftrightarrow 4 - 4\alpha + 3 = -1 \Leftrightarrow -4\alpha = -8 \Leftrightarrow \alpha = 2$

Β2. Η $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - \frac{1}{3}, x \in \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = x^2 - 4x + 3$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 3$

Το πρόσημο της f' και τα αντίστοιχα διαστήματα μονοτονίας της f είναι στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	1		3		$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+	
$f(x)$	↗		↘		↗	

Η f γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,1]$, $[3,+\infty)$, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1,3]$

Στη θέση $x=1$ έχει τοπικό μέγιστο το $f(1)=1$ και στη θέση $x=3$ τοπικό ελάχιστο το $f(3)=-\frac{1}{3}$

Β3. $$\lim_{x\to 3}\frac{f'(x)}{\sqrt{x+1}-2}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{\sqrt{x+1}-2}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-1)(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-1)(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{\sqrt{x+1}^2-2^2}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-1)(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3}(x-1)\left(\sqrt{x+1}+2\right)=8$$

Β4. Αναζητούμε τις λύσεις της εξίσωσης $f'(x)=3$

Επομένως $x^2-4x+3=3 \Leftrightarrow x^2-4x=0 \Leftrightarrow x(x-4)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \text{ή} \\ x=4 \end{cases}$

Άρα θα βρούμε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στα σημεία της $A(0,f(0))$ και $B(4,f(4))$

Για το σημείο $A(0,f(0))$ έχουμε $f(0)=-\frac{1}{3}$

Έστω $y=\lambda x+\beta$ η εξίσωση εφαπτομένης με $\boxed{\lambda=3}$ η οποία διέρχεται από το σημείο $A\left(0,-\frac{1}{3}\right)$ οπότε $-\frac{1}{3}=3\cdot 0+\beta \Leftrightarrow \boxed{\beta=-\frac{1}{3}}$

Άρα είναι η $y=3x-\frac{1}{3}$

Για το σημείο $B(4,f(4))$ έχουμε $f(4)=1$

Έστω $y=\lambda x+\beta$ η εξίσωση εφαπτομένης με $\boxed{\lambda=3}$ η οποία διέρχεται από το σημείο $A(4,1)$ οπότε $1=3\cdot 4+\beta \Leftrightarrow \boxed{\beta=-11}$

Άρα είναι η $y=3x-11$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από το ιστόγραμμα συχνοτήτων το αριστερό άκρο της 1ης κλάσης είναι 5 ενώ το δεξί άκρο της 4ης είναι το 29. Αν c το πλάτος των κλάσεων τότε θα είναι:

1η κλάση $[5,5+c)$

2η κλάση $[5+c,5+2c)$

3η κλάση $[5+2c,5+3c)$

4η κλάση $[5+3c,5+4c)$

Οπότε : $5+4c=29 \Leftrightarrow 4c=24 \Leftrightarrow c=6$

Από την υπόθεση είναι $\nu_1=3$ και $\nu_2=5$.

Το ποσοστό των μαθητών που ανήκουν στην 3η κλάση είναι διπλάσιο από το ποσοστό των μαθητών που ανήκουν στην 4η κλάση οπότε
$f_3\%=2f_4\% \Leftrightarrow f_3=2f_4 \Leftrightarrow \nu_3=2\nu_4$

Το άθροισμα των εμβαδών των τεσσάρων ορθογωνίων είναι 20 οπότε: $\nu=20$

Επίσης ισχύει: $\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4=20 \Leftrightarrow 3+5+2\nu_4+\nu_4=20 \Leftrightarrow 3\nu_4=12 \Leftrightarrow \nu_4=4$

Επομένως $\nu_3=8$

Γ2. Για τις αθροιστικές σχετικές συχνότητες έχουμε:

$$f_1=\frac{\nu_1}{\nu}=\frac{3}{20}=0,15 \text{ άρα } f_1\%=15$$

$$f_2=\frac{\nu_2}{\nu}=\frac{5}{20}=0,25 \text{ άρα } f_2\%=25$$

$$f_3=\frac{\nu_3}{\nu}=\frac{8}{20}=0,4 \text{ άρα } f_3\%=40$$

$$f_4=\frac{\nu_4}{\nu}=\frac{4}{20}=0,2 \text{ άρα } f_4\%=20$$

Οπότε ο πίνακας γίνεται:

Κλάσεις	x_i	ν_i	f_i	$f_i\%$
$[5,11)$	8	3	0,15	15
$[11,17)$	14	5	0,25	25
$[17,23)$	20	8	0,40	40
$[23,29)$	26	4	0,20	20
Σύνολο		20	1	100

Γ3. α) Το ποσοστό των μαθητών που χρειάζονται τουλάχιστον 11 λεπτά για να φτάσουν στο σχολείο είναι $f_2\%+f_3\%+f_4\%=25+40+20=85$

β) Το ποσοστό των μαθητών που χρειάζονται το πολύ 17 λεπτά για να φτάσουν στο σχολείο είναι $f_1\%+f_2\%=15+25=40$

Γ4. Η μέση τιμή είναι

$$\bar{x}=\frac{\sum_{1}^{4}x_i\nu_i}{\nu}=\frac{3\cdot 8+5\cdot 14+8\cdot 20+4\cdot 26}{20}=\frac{358}{20}=17,9$$

Γ5. Το 20% των μαθητών που χρειάζονται τον περισσότερο χρόνο για να φτάσουν στο σχολείο ανήκουν στην κλάση $[23,29)$. Το υπόλοιπο 20% θα πρέπει να ανήκει στην κλάση $[17,23)$ στην οποία βρίσκεται το 40%. Επειδή υποθέτουμε ότι οι παρατηρήσεις σε κάθε κλάση κατανέμονται ομοιόμορφα τότε το υπόλοιπο 20% θα πρέπει να ανήκει στο διάστημα $[20,23)$, οπότε οι μαθητές που χρειάζονται 20 λεπτά και πάνω για να έρθουν στο σχολείο χρησιμοποιούν κάποιο μεταφορικό μέσο.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. (i) Αν συμβολίσουμε με $E(x)$ την συνάρτηση των εσόδων τότε $E(x)=50x$

(ii) Το κέρδος είναι αν από τα έσοδα αφαιρέσουμε το κόστος ,δηλαδή

$$P(x)=E(x)-K(x)\Leftrightarrow P(x)=-x^2+80x-100$$

Δ2. $P'(x)=-2x+80, x\geq 0$

$P'(x)=0\Leftrightarrow -2x+80=0\Leftrightarrow x=40$

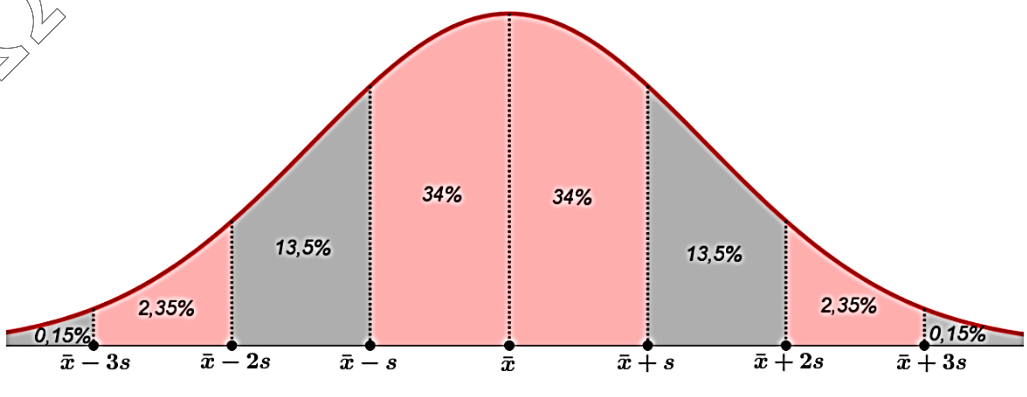
$P'(x)>0\Leftrightarrow -2x+80>0\Leftrightarrow 0\leq x<40$

x	0	40 $+\infty$
$P'(x)$	+	-
$P(x)$	↗	↘

Με βάση τον παραπάνω πίνακα έχουμε ότι το κέρδος μεγιστοποιείται όταν η εταιρεία παράγει 40 μονάδες του προϊόντος.

Δ3. (i) Αφού το 50% των συρταριών έχουν μήκος πάνω από 40cm τότε $\bar{x}=40$

Επίσης στην κανονική κατανομή ισχύουν τα παρακάτω



Τα 100 συρτάρια αντιστοιχούν σε $\frac{100}{4000}100\%=2,5\%$

Άρα το 2,5% των προϊόντων έχουν μήκος πάνω από 50 cm δηλαδή $\bar{x}+2s=50 \Leftrightarrow s=5$

(ii) $CV=\frac{s}{\bar{x}}=\frac{5}{40}=0{,}125$ άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές .

(iii) Το ποσοστό των ελλαττωματικών είναι το 0,3% της παραγωγής.

Επομένως $\frac{0{,}3}{100}\cdot 4000=12$ συρτάρια παράγει ελλαττωματικά η εταιρεία κάθε μέρα.