ΤΑΞΗ: **Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Ημερομηνία: Τετάρτη 19 Απριλίου 2023
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 133

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδες 128 και 129

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 185

Α4. (α) Σωστό (β) Σωστό (γ) Λάθος (δ) Σωστό (ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα είναι και συνεχής στο $x=0$

Δηλαδή $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$ **(1)**

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(e^{-x}+\alpha\right) = 1+\alpha$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(-x^2+3\right) = 3$$

$$f(0) = 1+\alpha$$

Από την σχέση **(1)** προκύπτει ότι $1+\alpha = 3 \Leftrightarrow \alpha = 2$

Επομένως $f(x) = \begin{cases} e^{-x}+2, x\le 0 \\ -x^2+3, x>0 \end{cases}$

Για την παράγωγο της f στο $x=0$ έχουμε

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{-x}-1}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{D.L.H}{=}}\lim_{x\to 0^-}\left(-e^{-x}\right)=-1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x^2+3-3}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x^2}{x}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0$$

Άρα η f **δεν είναι** παραγωγίσιμη στο $x=0$

B2. Η f παραγωγίσιμη σε κάθε ένα από τα διαστήματα $A_1=(-\infty,0)$, $A_2=(0,+\infty)$

με $f'(x)=\begin{cases}-e^{-x}, x<0\\ -2x, x>0\end{cases}$

Για $x<0$ έχουμε $e^{-x}<0$ ενώ για $x>0$ έχουμε $-2x<0$ άρα $f'(x)<0$ για κάθε $x\in A_1\cup A_2$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $x=0$ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ άρα η αντιστρέφεται .

B3. Ψάχνουμε τις λύσεις της εξίσωσης $f'(x)=-1$ με $x\neq 0$

Αν $x<0$ $f'(x)=-1\Leftrightarrow -e^{-x}=-1\Leftrightarrow e^{-x}=1\Leftrightarrow x=0$ απορρίπτεται

Αν $x>0$ $f'(x)=-1\Leftrightarrow -2x=-1\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

Άρα η ευθεία $y-f\left(\frac{1}{2}\right)=f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow y-\frac{11}{4}=-x+\frac{1}{2}\Leftrightarrow y=-x+\frac{13}{4}$

B4. Για το $\lim_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu(f(x))}{f(x)}$ επειδή $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^{-x}+2\right)=+\infty$ εργαζόμαστε ως εξής

$\left|\frac{\eta\mu(f(x))}{f(x)}\right|=\frac{|\eta\mu(f(x))|}{|f(x)|}\leq\frac{1}{|f(x)|}$ και επειδή $f(x)=e^{-x}+2>0$ έχουμε

$$\left|\frac{\eta\mu(f(x))}{f(x)}\right|\leq\frac{1}{f(x)}\Leftrightarrow-\frac{1}{f(x)}\leq\frac{\eta\mu(f(x))}{f(x)}\leq\frac{1}{f(x)}$$

Ισχύει $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f(x)}=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{1}{f(x)}\right)=0$

Άρα από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\eta\mu(f(x))}{f(x)}=0$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.i. Έστω $\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} f(x)dx=\kappa$ όπου $\kappa\in\mathbb{R}$ άρα $f(x)=x-\dfrac{8x}{x^2-1}+\kappa$

Οπότε $\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}}\left(x-\dfrac{8x}{x^2-1}+\kappa\right)dx=\kappa \Leftrightarrow \left[\dfrac{x^2}{2}-4\ln\left|x^2-1\right|+\kappa x\right]_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}}=\kappa$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{18}-4\ln\frac{8}{9}+\frac{\kappa}{3}\right)-\left(\frac{1}{18}-4\ln\frac{8}{9}-\frac{\kappa}{3}\right)=\kappa\Leftrightarrow\frac{2\kappa}{3}=\kappa\Leftrightarrow\boxed{\kappa=0}$$

ii. Αρκεί: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=0$

Πράγματι: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\dfrac{8x}{x^2-1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{8x}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{8x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{8}{x}\right)=0$

Γ2. i. Η f παραγωγίσιμη στο Α με

$$f'(x)=1-\frac{8(x^2-1)-8x-2x}{(x^2-1)^2}=\frac{(x^2-1)^2-8x^2+8+16x^2}{(x^2-1)^2}$$

$$=\frac{x^4-2x^2+1-8x^2+8+16x^2}{(x^2-1)^2}=\frac{x^4+6x^2+9}{(x^2-1)^2}=\frac{(x^2+1)^2}{(x^2-1)^2}>0 \text{ για κάθε } x\in A$$

Η f γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα

$$A_1=(-\infty,-1),\ A_2=(-1,1),\ A_3=(1,+\infty)$$

Εύρεση συνόλου τιμών

Η f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_1=(-\infty,-1)$ επομένως

$$f(A_1)=\left(\lim_{x\to-\infty} f(x),\lim_{x\to-1^-} f(x)\right)=(-\infty,+\infty)$$

Διότι

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-9x}{x^2-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$$

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{x^3-9x}{x^2-1}=\lim_{x\to-1^-}\left(\frac{x^3-9x}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}\right)=(-4)\cdot(-\infty)=+\infty$$

Η f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_2=(-1,1)$ επομένως

$$f(A_2)=\left(\lim_{x\to-1^+} f(x),\lim_{x\to1^-} f(x)\right)=(-\infty,+\infty)$$

Διότι :

$$\lim_{x\to-1^+}\frac{x^3-9x}{x^2-1}=\lim_{x\to-1^-}\left(\frac{x^3-9x}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}\right)=(-4)\cdot(+\infty)=-\infty$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x^3-9x}{x^2-1}=\lim_{x\to1^-}\left(\frac{x^3-9x}{x+1}\cdot\frac{1}{x-1}\right)=(-4)\cdot(-\infty)=+\infty$$

Η f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_3=(1,+\infty)$ επομένως

$$f(A_3)=\left(\lim_{x\to1^+} f(x),\lim_{x\to1^-} f(x)\right)=(-\infty,+\infty)$$

Διότι :

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x^3-9x}{x^2-1}=\lim_{x\to1^-}\left(\frac{x^3-9x}{x+1}\cdot\frac{1}{x-1}\right)=(-4)\cdot(+\infty)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-9x}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$$

Άρα $f(A)=\mathbb{R}$

ii. $x^3-\alpha x^2-9x+\alpha=0\Leftrightarrow x^3-9x=\alpha x^2-\alpha\Leftrightarrow x^3-9x=\alpha(x^2-1)$

Για $x=1$ έχω $-8=0\cdot\alpha$ Αδύνατη

Για $x=-1$ έχω $8=0\cdot\alpha$ Αδύνατη

Οπότε οι αριθμοί $1,-1$ δεν αποτελούν λύσεις της εξίσωσης.

Για $x\neq\pm1$ έχουμε $\dfrac{x^3-9x}{x^2-1}=\alpha$ ή $f(x)=\alpha$

• $\alpha\in f(A_1)=\mathbb{R}$ άρα υπάρχει $x_1\in A_1:\boxed{f(x_1)=\alpha}$

Το x_1 μοναδικό διότι f γνησίως αύξουσα στο A_1

• $\alpha\in f(A_2)=\mathbb{R}$ άρα υπάρχει $x_2\in A_2:\boxed{f(x_2)=\alpha}$

Το x_2 μοναδικό διότι f γνησίως αύξουσα στο A_2

• $\alpha\in f(A_3)=\mathbb{R}$ άρα υπάρχει $x_3\in A_3:\boxed{f(x_3)=\alpha}$

Το x_3 μοναδικό διότι f γνησίως αύξουσα στο A_3

Άρα η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει τρείς πραγματικές ρίζες για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$

Γ3. $f'(x)=\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^2$

$$f''(x)=2\frac{x^2+1}{x^2-1}\cdot\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)'=2\frac{x^2+1}{x^2-1}\cdot\frac{2x(x^2-1)-2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$$

$$=2\frac{x^2+1}{x^2-1}\cdot\frac{2x^3-2x-2x^3-2x}{(x^2-1)^2}=\frac{-2(x^2+1)\cdot 4x}{(x^2-1)^3}=\frac{-8x}{(x^2-1)^3}(x^2+1)$$

Το πρόσημο της f'' και η κυρτότητα της f φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$-8x$		-		-	0	+		+	
$(x^2-1)^3$		+	0	-		-	0	+	
x^2+1		+		+		+		+	
f''		-	‖	+	0	-	‖	+	
f		∩	‖	∪		∩	‖	∪	

Η f έχει σημείο καμπής το $M(0,f(0))$ ή $M(0,0)$

Η εφαπτομένη στο Μ είναι $y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)\Leftrightarrow y=9x$

Γ4. Για το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf(x)+(\kappa-10)x^2+x^3f\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2\cdot f(x)-x^3+\kappa^2x^2}$ κάνουμε το εξής

Διαιρώ με x^2 όλους τους όρους $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{f(x)}{x}+(\kappa-10)+x\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)}{f(x)-x+\kappa^2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)$ θέτω $u=\dfrac{1}{x}$ άρα $\dfrac{1}{4}=x$ όταν $x\to+\infty$ τότε $u\to0^+$ οπότε

$\lim\limits_{u\to0^+}\dfrac{f(u)}{u}=f'(0)=9$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{f(x)}{x}+(\kappa-10)+x\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)}{f(x)-x+\kappa^2}=\dfrac{1+\kappa-10+9}{\kappa^2}=\dfrac{1}{\kappa}$

Άρα θα δείξουμε ότι υπάρχει μοναδικός $\kappa\in(0,1)$ ώστε $\dfrac{1}{\kappa}=e^{\kappa}\Leftrightarrow e^{\kappa}\cdot\kappa-1=0$

Θεωρώ: $\varphi(x)=e^x\cdot x-1$, η φ συνεχής στο [0, 1] και

$\left.\begin{array}{l}\varphi(0)=-1\\ \varphi(1)=e-1\end{array}\right\}$ Άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0\in(0,1):\varphi(x_0)=0$

$\varphi'(x)=e^x\cdot x+x\cdot e^x=e^x(x+1)>0$ για κάθε $x\in[0,1]$ άρα το x_0 μοναδικό

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.i. Η f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=e^x-2x$ και $f''(x)=e^x-2$

$f''(x)=0\Leftrightarrow e^x-2=0\Leftrightarrow e^x=2\Leftrightarrow x=\ln2$

$f''(x)>0\Leftrightarrow e^x-2>0\Leftrightarrow e^x>2\Leftrightarrow x>\ln2$

Άρα το πρόσημο της f'' και η κυρτότητα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\frown$		$\smile$

Η f κοίλη στο $(-\infty, \ln 2]$ και κυρτή στο $[\ln 2, +\infty)$

Το σημείο $(\ln 2, f(\ln 2))$ ή $(\ln 2, 2-\ln^2 2)$ είναι το σημείο καμπής.

ii. Το πρόσημο της f'' στα διαστήματα $(-\infty, \ln 2]$, $[\ln 2, +\infty)$ μας δείχνει το είδος της μονοτονίας της f'.

Οπότε η f' γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, \ln 2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\ln 2, +\infty)$

Στη θέση $x = \ln 2$ έχει ελάχιστο το

$$f'(\ln 2) = e^{\ln 2} - 2\ln 2 = 2 - 2\ln 2 = 2 - \ln 4 = \ln e^2 - \ln 4 > 0$$

Δηλαδή το ελάχιστο της f' είναι θετικό επομένως $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Επομένως η f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $[-1, 0]$ και επιπλέον $f(-1) = e^{-1} - 1 < 0$, $f(0) = 1 > 0$

Άρα από Θεώρημα Bolzano υπάρχει $\alpha \in (-1, 0) : f(\alpha) = 0$, δηλαδή η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $M(\alpha, 0)$

Το α είναι μοναδικό διότι η f γνησίως αύξουσα.

Δ2. $2f(\beta)\ln x - x + 1 \leq 0$ για κάθε $x > 0$, θεωρώ $h(x) = 2f(\beta)\ln x - x + 1$, $x > 0$

Για την οποία ισχύει $h(x) \leq h(1)$ για κάθε $x > 0$

Δηλαδή στη θέση $x = 1$ η $h(x)$ έχει μέγιστο, είναι παραγωγίσιμη και είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της άρα από Θεώρημα Fermat : $\boxed{h'(1) = 0}$

Όμως $h'(x)=\dfrac{2f(\beta)}{x}-1$ και $h'(1)=0 \Leftrightarrow f(\beta)=\dfrac{1}{2}$

Ισχύει ότι $f(\alpha)=0$, $f(0)=1$, $f(\beta)=\dfrac{1}{2}$ και επειδή η f γνησίως αύξουσα προκύπτει ότι $\boxed{\alpha<\beta<0}$

Δ3. Η $g(x)=f(x)^2\left(f(x)-1\right)^2$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$g'(x)=\cancel{2}\,\cancel{f(x)}\cdot\cancel{f'(x)}\cdot\left(f(x-1)\right)^{\cancel{2}}+\cancel{2}f^{\cancel{2}}(x)\cdot\left(f\cancel{(x)}-1\right)\cdot\cancel{f'(x)}$$

$$g'(x)=2f'(x)\cdot f(x)\cdot\left(f(x)-1\right)\cdot\left(f(x)-1+f(x)\right)$$
$$=2f'(x)\cdot f(x)\cdot\left(f(x-1)\cdot\left(2f(x)-1\right)\right)$$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=0 \Leftrightarrow \boxed{x=\alpha}$$
$$\text{ή } f(x)-1=0 \Leftrightarrow f(x)=1 \Leftrightarrow \boxed{x=0}$$
$$\text{ή } f(x)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{x=\beta}$$

$f(x)-1>0 \Leftrightarrow f(x)>1 \Leftrightarrow f(x)>f(0) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} x>0$

$f(x)>0 \Leftrightarrow f(x)>f(\alpha) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} x>\alpha$

$f(x)-\dfrac{1}{2}>0 \Leftrightarrow f(x)>\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow f(x)>f(\beta) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} x>\beta$

x	$-\infty$		α		β		0		$+\infty$
$f(x)-1$		-		-		-	0	+	
$2f(x)-1$		-		-	0	+		+	
$2f'(x)$		+		+		+		+	
$f(x)$		-	0	+		+		+	
$g(x)$		-		+		-		+	
		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Άρα η g παρουσιάζει δύο τοπικά ελάχιστα και ένα τοπικό μέγιστο

Δ4. $I=\int_0^1\left(e^{\sqrt{x}}-x\right)dx=\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx-\int_0^1 x\,dx=I_1-I_2$

$I_2=\int_0^1 x\,dx=\left[\dfrac{x^2}{2}\right]_0^1=\dfrac{1}{2}$

Για το $I_1=\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx$ θέτουμε $u=\sqrt{x}\Rightarrow u^2=x\Rightarrow 2u\,du=dx$

Άρα $I_1=\int_0^1 2u\,e^u du=\int_0^1 2u\left(e^u\right)'du=\left[2ue^u\right]_0^1-\int_0^1 2e^u du=\left[2ue^u\right]_0^1-\left[2e^u\right]_0^1=\left[2ue^u-2e^u\right]_0^1=2$

Τελικά έχουμε : $I=I_1-I_2=2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$