

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2023  
Β' ΦΑΣΗ

E\_3.Μλ2ΓΑ(α)

ΤΑΞΗ: Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Σάββατο 29 Απριλίου 2023  
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 135

Α2.

α) Λάθος	β) Λάθος	γ) Σωστό	δ) Σωστό	ε) Λάθος
----------	----------	----------	----------	----------

Α3.

α) $\ln e = 1$	β) $\alpha^{\log_a \theta} = \theta$	γ) $\log_a 1 = 0$	δ) $\log_a \alpha^x = x$
----------------	--------------------------------------	-------------------	--------------------------

## ΘΕΜΑ Β

Β1. Αφού ο αριθμός 2 είναι ρίζα του  $P(x)$  θα ισχύει  $P(2) = 0$ 

$$\Delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta} P(2) = 0 \Leftrightarrow 16 - 8\alpha - 12 + 2\beta - 4 = 0 \Leftrightarrow 2\beta = 8\alpha \Leftrightarrow \boxed{\beta = 4\alpha} \quad (1)$$

Το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $P(x)$  με το  $x+1$  είναι  $-12$  άρα

$$P(-1) = -12 \Leftrightarrow 1 + \alpha - 3 - \beta - 4 = -12 \Leftrightarrow \boxed{\alpha - \beta = -6} \quad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2) έχουμε

$$\begin{cases} \beta = 4\alpha \\ \alpha - \beta = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 4\alpha \\ \alpha - 4\alpha = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 4\alpha \\ -3\alpha = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 8 \\ \alpha = 2 \end{cases}$$

**B2.** Το πολυώνυμο για  $\alpha = 2$  και  $\beta = 8$  γίνεται  $P(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4$

Κάνουμε τη διαίρεση του  $P(x)$  με το  $x - 2$  με τη βοήθεια του σχήματος Horner.

1	-2	-3	8	-4	2
↓	2	0	-6	4	
1	0	-3	2	0	

Άρα  $P(x) = (x - 2)(x^3 - 3x + 2)$

Το πολυώνυμο  $x^3 - 3x + 2$  έχει ρίζα την  $x = 1$  άρα το παραγοντοποιούμε με τη βοήθεια του σχήματος Horner

1	0	-3	2	1
↓	1	1	-2	
1	1	-2	0	

$x^3 - 3x + 2 = (x - 1)(x^2 + x - 2)$

Άρα  $P(x) = (x - 2)(x - 1)(x^2 + x - 2)$

Επομένως  $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 1)(x^2 + x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ \text{ή} \\ x - 1 = 0 \\ \text{ή} \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \text{ή} \\ x = 1 \\ \text{ή} \\ x = 1 \text{ ή } x = -2 \end{cases}$

Άρα οι ρίζες της εξίσωσης  $P(x) = 0$  είναι το 1 (διπλή ρίζα) το 2 και το  $-2$

**B3.** Η συνάρτηση ορίζεται για εκείνα τα  $x \in \mathbb{R}$  για τα οποία

$\frac{P(x)}{x - 1} \geq 0$  και  $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow P(x)(x - 1) \geq 0$  και  $x \neq 1$

Έχουμε

$P(x)(x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 1)(x^2 + x - 2)(x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 1)^2(x^2 + x - 2) \geq 0$

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$	
$x - 2$	-	-	-	○	+	
$(x - 1)^2$	+	+	○	+	+	
$x^2 + x - 2$	+	○	-	○	+	
$(x - 2)(x - 1)^2(x^2 + x - 2)$	-	○	+		○	+

Άρα  $x \in [-2, 1) \cup [2, +\infty)$

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.**  $\eta\mu(5\pi - x) = \eta\mu(4\pi + \pi - x) = \eta\mu(\pi - x) = \eta\mu x$

$$\sigma\upsilon\nu(3\pi + x) = \sigma\upsilon\nu(2\pi + \pi + x) = \sigma\upsilon\nu(\pi + x) = -\sigma\upsilon\nu x$$

$$\sigma\upsilon\nu(4\pi - x) = \sigma\upsilon\nu(-x) = \sigma\upsilon\nu x$$

$$\eta\mu\left(x - \frac{5\pi}{2}\right) = -\eta\mu\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) = -\eta\mu\left(2\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) = -\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sigma\upsilon\nu x$$

Άρα η παράσταση  $A = \eta\mu^2(5\pi - x) + \sigma\upsilon\nu(3\pi + x) \cdot \sigma\upsilon\nu(4\pi - x) + 2\eta\mu^2\left(x - \frac{5\pi}{2}\right)$

με βάση τα παραπάνω γίνεται

$$A = \eta\mu^2 x + (-\sigma\upsilon\nu x) \cdot \sigma\upsilon\nu x + 2(-\sigma\upsilon\nu x)^2 = \eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x + 2\sigma\upsilon\nu^2 x = \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$$

**Γ2.** Γνωρίζουμε ότι η περίοδος της συνάρτησης δίνεται από τον τύπο  $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Ισχύει  $T = \pi$  άρα  $\omega = 2$  οπότε  $f(x) = 1 + B\sigma\upsilon\nu(2x)$

**1<sup>ος</sup> τρόπος**

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $-1 \leq \sigma\upsilon\nu 2x \leq 1$  όπου το 1 και το -1 είναι αντίστοιχα η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του  $\sigma\upsilon\nu 2x$

Οπότε :  $-1 \leq \sigma\upsilon\nu 2x \leq 1 \Leftrightarrow -B \geq B\sigma\upsilon\nu 2x \geq B \Leftrightarrow 1 - B \geq 1 + B\sigma\upsilon\nu 2x \geq 1 + B$

Επομένως  $1 + B \leq f(x) \leq 1 - B$

Από υπόθεση έχουμε ότι η μέγιστη τιμή της  $f$  είναι 5 άρα

$$1 - B = 5 \Leftrightarrow B = -4 \text{ άρα } f(x) = 1 - 4\sigma\upsilon\nu(2x)$$

Η ελάχιστη τιμή της  $f$  είναι το  $1 + B$  δηλαδή  $1 + B = 1 - 4 = -3$

**2<sup>ος</sup> τρόπος**

Η συνάρτηση  $y = B\sigma\upsilon\nu(2x), B < 0$  (1) είναι συμμετρική της  $y = -B\sigma\upsilon\nu(2x), B < 0$  ως προς τον άξονα  $x'x$  οπότε έχουν την ίδια μέγιστη και την ίδια ελάχιστη τιμή στο  $\mathbb{R}$ .

Η  $y = -B\sigma\upsilon\nu(2x), B < 0$  έχει μέγιστο το  $-B$  και ελάχιστο το  $B$

Άρα και η (1) έχει μέγιστο το  $-B$  και ελάχιστο το  $B$

Επομένως η  $f(x) = 1 + B\sin(2x)$ ,  $B < 0$  έχει μέγιστο το  $1 - B$  και ελάχιστο το  $1 + B$

Άρα  $1 - B = 5 \Leftrightarrow B = -4$

**Γ3.** Θα λύσουμε την εξίσωση  $f(x) = 3$ ,  $x \in [-\pi, \pi]$

$$f(x) = 3 \Leftrightarrow 1 - 4\sin 2x = 3 \Leftrightarrow -4\sin 2x = 2 \Leftrightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2x = \sin \frac{2\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3} \\ \text{ή} \\ 2x = 2\kappa\pi - \frac{2\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \kappa\pi + \frac{\pi}{3} \\ \text{ή} \\ x = \kappa\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$x = \kappa\pi + \frac{\pi}{3}$	$x = \kappa\pi - \frac{\pi}{3}$
$-\pi \leq x \leq \pi$	$-\pi \leq x \leq \pi$
$-\pi \leq \kappa\pi + \frac{\pi}{3} \leq \pi$	$-\pi \leq \kappa\pi - \frac{\pi}{3} \leq \pi$
$-1 \leq \kappa + \frac{1}{3} \leq 1$	$-1 \leq \kappa - \frac{1}{3} \leq 1$
$-\frac{4}{3} \leq \kappa \leq \frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3} \leq \kappa \leq \frac{4}{3}$
<p>επειδή <math>\kappa \in \mathbb{Z}</math> έχουμε <math>\kappa = -1</math> και <math>\kappa = 0</math></p>	<p>επειδή <math>\kappa \in \mathbb{Z}</math> έχουμε <math>\kappa = 0</math> και <math>\kappa = 1</math></p>
<p>άρα <math>x = -\frac{2\pi}{3}</math> και <math>x = \frac{\pi}{3}</math></p>	<p>άρα <math>x = -\frac{\pi}{3}</math> και <math>x = \frac{2\pi}{3}</math></p>

Άρα τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της  $f$  και της ευθείας  $y = 3$ ,  $x \in [-\pi, \pi]$

είναι τα  $A\left(-\frac{2\pi}{3}, 3\right)$ ,  $B\left(-\frac{\pi}{3}, 3\right)$ ,  $\Gamma\left(\frac{\pi}{3}, 3\right)$  και  $\Delta\left(\frac{2\pi}{3}, 3\right)$

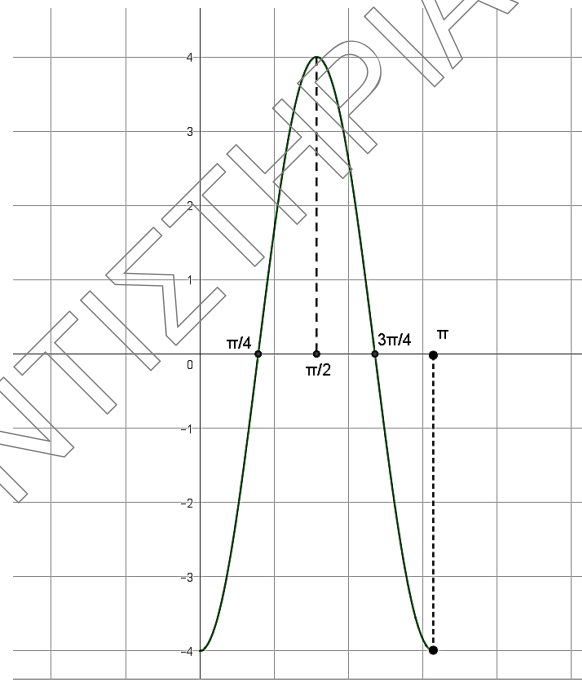
**Γ4. α)**  $g(x) = f(x) - 1 \Leftrightarrow g(x) = -4\sigma\upsilon\nu 2x, x \in [0, \pi]$

Η περίοδος της συνάρτησης είναι  $T = \pi$ , έχει μέγιστο το 4 και ελάχιστο το  $-4$

$x$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\pi$
$\sigma\upsilon\nu 2x$	1	0	-1	0	1
$g(x) = -4\sigma\upsilon\nu 2x$	-4	0	4	0	-4

Άρα  $g(x) > 0$  όταν  $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$

$g(x) < 0$  όταν  $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$



**β)** Να λύσετε την ανίσωση  $g(x) \cdot (\pi - 4x) \cdot (x^2 - \pi x) > 0$ .

Βρίσκουμε τις ρίζες του κάθε παράγοντα ξεχωριστά

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \text{ ή } x = \frac{3\pi}{4}$$

$$\pi - 4x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

$$x^2 - \pi x = 0 \Leftrightarrow x(x - \pi) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = \pi$$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\pi$
$g(x)$		-	+	-
$\pi - 4x$		+	-	-
$x^2 - \pi x$	-	-	-	-
$g(x) \cdot (\pi - 4x) \cdot (x^2 - \pi x)$	-	+	+	-

Άρα  $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1.** (α) Α' τρόπος

Από το γράφημα της  $f$  προκύπτει ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα

Β' τρόπος

Έστω  $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$  με  $x_1 < x_2$  τότε

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \quad (1)$$

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \ln x_1 < \ln x_2 \quad (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) προκύπτει ότι  $f(x_1) < f(x_2)$

Άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$

(β)  $f(x) = x \Leftrightarrow \ln x + x - 1 = x \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$  Άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x) = \ln x + x - 1$  και  $y = x$  τέμνονται στο σημείο  $A(e, e)$

$$\Delta 2. \ln 3 > e - 2 \Leftrightarrow \ln 3 + 2 > e \Leftrightarrow f(3) > f(e) \Leftrightarrow 3 > e$$

Β τρόπος:  $\ln 3 > 1 > e - 2$

$$\begin{aligned} \Delta 3. f(e^x) = e^{3x} - e^{2x} + x &\Leftrightarrow \ln e^x + e^x - 1 = e^{3x} - e^{2x} + x \Leftrightarrow e^{3x} - e^{2x} - e^x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{2x}(e^x - 1) - (e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow (e^x - 1)(e^{2x} - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (e^x - 1)(e^x - 1)(e^x + 1) = 0 \Leftrightarrow (e^x - 1)^2 (e^x + 1) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

$$\Delta 4. \text{ Η } \frac{f(x) - e}{f(x) - x + 1} \text{ ορίζεται για } x > 0 \text{ και } f(x) - x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$$

$$\text{Άρα } \frac{f(x) - e}{f(x) - x + 1} > 0 \Leftrightarrow (f(x) - e)(f(x) - x + 1) > 0$$

Βρίσκουμε τις ρίζες και το πρόσημο του κάθε παράγοντα

$$f(x) - e = 0 \Leftrightarrow f(x) = e \Leftrightarrow x = e$$

$$f(x) - e > 0 \Leftrightarrow f(x) > e \Leftrightarrow f(x) > f(e) \Leftrightarrow x > e$$

$$f(x) - x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x + x - 1 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$f(x) - x + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x + x - 1 - x + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

x	0	1	e	$+\infty$
$f(x) - e$	-	-	○	+
$f(x) - x + 1$	-	○	+	+
$(f(x) - e)(f(x) - x + 1)$	+	∥	-	+

$$\text{Άρα } x \in (0, 1) \cup (e, +\infty)$$