ΤΑΞΗ: **Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΑΛΓΕΒΡΑ**

Ημερομηνία: Σάββατο 29 Απριλίου 2023
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Βλέπε σελ 90.

Α2.

Πίνακας 1				
1	2	3	4	5
Ε	Γ	Α	Δ	Β

Α3. **α)** Λάθος
β) Σωστό
γ) Σωστό
δ) Λάθος
ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε:

$$x^2+2x-8<0 \Leftrightarrow$$

$$\Delta = 2^2-4\cdot 1\cdot(-8)=4+32=36$$

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{36}}{2\cdot 1}=\frac{-2\pm 6}{2}$$

οπότε $x_1=\frac{-2+6}{2}=\frac{4}{2}=2$ ή $x_2=\frac{-2-6}{2}=\frac{-8}{2}=-4$

Πρόσημο του τριωνύμου

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
x^2+2x-8		+	0	−	0	+	

Άρα $x \in (-4,2)$

Β2. $|x-1| \succ 1 \Leftrightarrow x-1 \succ 1 \Leftrightarrow x \succ 2$ ή $x-1 \prec -1 \Leftrightarrow x \prec 0$

δηλαδή $x \in (-\infty,0) \cup (2,+\infty)$.

Β3. Αφού $x \in (-4,2)$ και $x \in (-\infty,0) \cup (2,+\infty)$ προκύπτει ότι οι κοινές λύσεις είναι $x \in (-4,0)$.

Β4. Έχουμε:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}+1} - \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} - \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}-1-(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2})^2-1^2} = \frac{\sqrt{2}-1-\sqrt{2}-1}{2-1} = \frac{-2}{1} = -2$$

Αφού $-2 \in (-4,0)$ ο αριθμός $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}+1} - \frac{1}{\sqrt{2}-1}$ είναι κοινή λύση των ανισώσεων (1) και (2).

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Πρέπει $x-3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$ άρα $A_F = (-\infty,3) \cup (3,+\infty)$

$x^2-x-6 = (x-3)(x+2)$ διότι:

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1+24 = 25 \quad x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 5}{2} \Leftrightarrow x_1 = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad \text{ή}$$

$$x_2 = \frac{1-5}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Άρα $f(x) = \dfrac{(x-3)(x+2)}{x-3} = x+2, x \neq 3$

Γ2. Έχουμε:

$$x_1 = 2\cdot f(\frac{1}{2}) = 2\cdot(\frac{1}{2}+2) = 1+4 = 5$$

$$x_2 = -2\cdot f(-\frac{3}{2}) = -2\cdot(-\frac{3}{2}+2) = 3-4 = -1$$

οπότε: $S = x_1 + x_2 = 5+(-1) = 4$ και $P = x_1\cdot x_2 = 5\cdot(-1) = -5$

Η εξίσωση δευτέρου βαθμού είναι η
$x^2 - S\cdot x + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4\cdot x + (-5) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4\cdot x - 5 = 0$

Γ3. Έχουμε: $A = \left(\frac{2023}{2022}\right)^2 - 4\cdot\left(\frac{2023}{2022}\right) - 5$

Αρκεί να βρούμε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - 4\cdot x - 5$.

$\Delta = (-4)^2 - 4\cdot 1\cdot(-5) = 16+20 = 36$

$$x_{1,2} = \frac{-(-4)\pm\sqrt{36}}{2\cdot 1} = \frac{4\pm 6}{2} \Leftrightarrow x_1 = \frac{4+6}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ ή } x_2 = \frac{4-6}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Πρόσημο του τριωνύμου

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
x^2-4x-5		$+$	0	$-$	0	$+$	

Αφού $-1 \prec \frac{2023}{2022} \prec 5$ το πρόσημο της παράστασης Α είναι το ίδιο με το πρόσημο του τριωνύμου στο διάστημα $(-1,5)$.

Άρα $A \prec 0$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. ι) $\Delta = (3\lambda-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(2-\lambda) = 9\lambda^2 - 6\lambda + 1 - 8 + 4\lambda = 9\lambda^2 - 2\lambda - 7$

ιι) Η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες όταν $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 9\lambda^2 - 2\lambda - 7 \geq 0$

$\Delta=(-2)^2-4\cdot 9\cdot(-7)=4+252=256$

$\lambda_{1,2}=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{256}}{2\cdot 9}=\dfrac{2\pm 16}{18}\Leftrightarrow \lambda_1=\dfrac{2+16}{18}=\dfrac{18}{18}=1$ ή

$\lambda_2=\dfrac{2-16}{18}=\dfrac{-14}{18}=-\dfrac{7}{9}$

Πρόσημο του τριωνύμου

λ	$-\infty$		$-\frac{7}{9}$		1		$+\infty$
$9\lambda^2-2\lambda-7$		$+$	0	$-$	0	$+$	

οπότε $\lambda\le -\dfrac{7}{9}$ ή $\lambda\ge 1$.

Δ2. Έχουμε:

$x_1+x_2=-(3\lambda-1)=1-3\lambda$ και $x_1\cdot x_2=2-\lambda$

$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2=(1-3\lambda)^2-2(2-\lambda)=1-6\lambda+9\lambda^2-4+2\lambda=9\lambda^2-4\lambda-3$

Δ3. Έχουμε:

$A=x_1^2+x_2^2+x_1\cdot x_2(9\cdot x_1\cdot x_2+2)-6(x_1^2x_2+x_1x_2^2)=$

$=9\lambda^2-4\lambda-3+(2-\lambda)[9(2-\lambda)+2]-6x_1\cdot x_2(x_1+x_2)=$

$=9\lambda^2-4\lambda-3+(2-\lambda)(18-9\lambda+2)-6(2-\lambda)(1-3\lambda)=$

$=9\lambda^2-4\lambda-3+(2-\lambda)(20-9\lambda)-6(2-6\lambda-\lambda+3\lambda^2)=$

$=9\lambda^2-4\lambda-3+40-18\lambda-20\lambda+9\lambda^2-12+36\lambda+6\lambda-18\lambda^2=$

$=15$

Δ4. Η εξίσωση (1) έχει θετικές ρίζες όταν:

$\Delta\ge 0\Leftrightarrow$

$9\lambda^2-2\lambda-7\ge 0\Leftrightarrow$

$\lambda\le -\dfrac{7}{9}$ ή $\lambda\ge 1$.

και

$S\succ 0\Leftrightarrow$

$1-3\lambda\succ 0$

$\Leftrightarrow \lambda\prec\dfrac{1}{3}$

και

$P\succ 0\Leftrightarrow$

$2-\lambda\succ 0\Leftrightarrow$

$\lambda\prec 2$

από όπου προκύπτει ότι $\lambda\le -\dfrac{7}{9}$