ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Σάββατο 7 Μαΐου 2022
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελίδα 134

Α2. Σελίδα 33

Α3. Σ Λ Σ Σ Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $$\begin{cases} P(1)=0 \\ P(2)=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+\alpha-5+\beta=0 \\ 16+4\alpha-10+\beta=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=3 \\ 4\alpha+\beta=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=3 \\ 3\alpha=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=1 \\ \beta=2 \end{cases}$$

Β2. $P(x)=2x^3+x^2-5x+2$

Κάνουμε σχήμα Horner, φυσικά με το 1.

2	1	-5	2	1
	2	3	-2	
2	3	-2	0	

$$P(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2+3x-2)=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=-2 \text{ ή } x=\frac{1}{2}$$

Β3. α)

2	1	-5	2	2
	4	10	10	
2	5	5	12	

$P(x)=(x-2)(2x^2+5x+5)+12$

β) $P(x)-12<0 \Leftrightarrow (x-2)(2x^2+5x+5)<0 \Leftrightarrow x-2<0 \Leftrightarrow x<2$

Το τριώνυμο $2x^2+5x+5$ είναι πάντοτε θετικό αφού έχει αρνητική διακρίνουσα.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Επειδή από την θεωρία ως γνωστόν *ισχύει* :

$$\eta\mu(\pi - x) = \eta\mu\chi \ , \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \eta\mu\chi$$

$$, \sigma\upsilon\nu(2\pi - x) = \sigma\upsilon\nu\chi \ , \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\sigma\upsilon\nu\chi$$

και τέλος $\sigma\upsilon\nu(\pi - x) = -\sigma\upsilon\nu\chi$ η f(x) γίνεται :
f(x)= $\eta\mu^2\chi+2\sigma\upsilon\nu\chi+\sigma\upsilon\nu^2\chi = 2\sigma\upsilon\nu\chi+1$

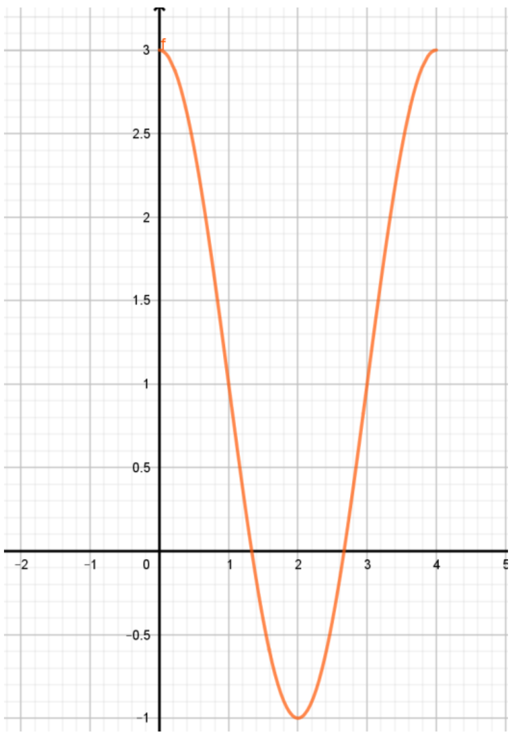
Γ2. Για $x \in \mathbb{R}$, $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}x \in [-1,1]$ τότε $2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}x \in [-2,+2]$

άρα $g(\chi)=2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}x+1 \in [-1,3]$

άρα έχει ελάχιστο το -1, μέγιστο το 3 και περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$

Γ3. Κατασκευάζουμε ένα πίνακα τιμών

x	0	1	2	3	4
y	3	1	-1	1	3



Γ4. $2συν\frac{π}{2}x + 1 = 0 \Leftrightarrow συν\frac{π}{2}x = -1/2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow συν\frac{π}{2}x = συν(π - π/3) \Leftrightarrow \frac{π}{2}x = 2κπ \pm 2π/3 \Leftrightarrow χ = 4κ \pm 4/3$ $κ \in Z$

$0<χ<4 \Rightarrow 0<4κ+4/3<4 \Rightarrow -4/3<4κ<8/3 \Rightarrow -1/3<κ<2/3$ οπότε κ=0 όμοια

$0<χ<4 \Rightarrow 0<4κ-4/3<4 \Rightarrow 4/3<4κ<16/3 \Rightarrow 1/3<κ<4/3$ οπότε κ=1

Για κ = 0 ο τύπος με το + δίνει χ=4/3. Για κ=1 ο τύπος με το – δίνει 8/3

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $0 < f(x) < 1 \Leftrightarrow 0 < \log\ 2^{x+1} + 8\ - 2\log 2 < 1 \Leftrightarrow$

$\log 1 < \log\ 2^{x+1} + 8\ - \log 2^2 < \log 10 \Leftrightarrow$

$\log 1 < \log\frac{2^{x+1}+8}{4} < \log 10 \underset{\log x \uparrow}{\Longleftrightarrow} 1 < \frac{2^{x+1}+8}{4} < 10$

$\Leftrightarrow 4 < 2^{x+1} + 8 < 40 \Leftrightarrow -4 < 2^{x+1} < 32 \Leftrightarrow$

(η πρώτη ανίσωση αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$) $2^{x+1} < 2^5 \underset{2^x \uparrow}{\Longleftrightarrow} x+1<5 \Leftrightarrow x<4$

Δ2 Το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ακέραιους συντελεστές αφού οι α, β είναι ακέραιοι. Ο α, ως ακέραια ρίζα του πολυωνύμου P, ανήκει στο σύνολο των διαιρετών του σταθερού όρου 3. Δηλαδή είναι ένας από τους -1, 1, -3, 3. Σε κάθε περίπτωση α<4. Επομένως , από το Δ1, προκύπτει ότι 0< f(α)<1. Έτσι έχουμε: $f(α)^{5β-24} < f(α)^{β(β-5)}$ $\overset{(f(α))^x \downarrow}{\Longleftrightarrow}$ $5β-24>β(β-5) \Leftrightarrow β^2 - 10β + 24 < 0$ και από τον κανόνα προσήμου τριωνύμου προκύπτει $4<β<6$, οπότε αφού ο β είναι ακέραιος έπεται ότι β=5.

Για β=5 και αφού ο α είναι ρίζα του πολυωνύμου P έχουμε:

P(α)=0 $\Leftrightarrow 2α^3 + 5α^2 - 4α^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 2α^3 + α^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow$ (σχήμα Horner στη θέση 1) $(α-1)(2α^2 + 3α + 3) = 0 \Leftrightarrow α=1$ ($2α^2 + 3α + 3 = 0$ αδύνατη)

Δ3. $P(x)<0 \Leftrightarrow 2x^3+5x^2-4x-3<0 \Leftrightarrow$ (σχήμα Horner στη θέση 1)

$(x-1)(2x^2+7x+3)<0$

x	$-\infty$		-3		-1/2		1		$+\infty$
x-1		-		-		-	0	+	
$2x^2+7x+3$		+	0	-	0	+		+	
P(x)		-	0	+	0	-	0	+	

Επομένως $x \in \ -\infty,-3\ \cup\left(-\frac{1}{2},1\right)$

Δ4. Για $x \in \ 0,\pi$ είναι ημ$x \in \ 0,1$. Από τον πίνακα του Δ3 προκύπτει ότι

P(ημχ) ≤ 0 (2).

Επίσης από το Δ1, προκύπτει ότι για ημ$x \le 1 < 4$ είναι f(ημx)<1 (3)

Με πρόσθεση κατά μέλη των (2) και (3) προκύπτει P(ημx) + f(ημx)<1.