

ΤΑΞΗ: Α' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 7 Μαΐου 2022
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη σχολικό σελίδα 90

A2.

- i) Λάθος
- ii) Σωστό
- iii) Λάθος
- iv) Σωστό
- v) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1.

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} - \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \\
 &= \frac{\sqrt{6}+(\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2} - \frac{\sqrt{6}-(\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{6}+2}{3-2} - \frac{\sqrt{6}-2}{3-2} = \sqrt{6}+2 - (\sqrt{6}-2) = \\
 &= \sqrt{6}+2 - \sqrt{6}+2 = 4
 \end{aligned}$$

$$B = \sqrt{2 + \sqrt[4]{13 + \sqrt[3]{27}}} = \sqrt{2 + \sqrt[4]{13 + 3}} = \sqrt{2 + \sqrt[4]{16}} = \sqrt{2 + 2} = \sqrt{4} = 2$$

B2.

$$\begin{aligned} \frac{|3-x|-2}{4} - \frac{|2x-6|-3}{2} > -2 &\Leftrightarrow \frac{|-(x-3)|-2}{4} - \frac{|2(x-3)|-3}{2} > -2 \\ &\Leftrightarrow \frac{|x-3|-2}{4} - \frac{2|x-3|-3}{2} > -2 \Leftrightarrow \cdot 4 \\ 4 \cdot \frac{|x-3|-2}{4} - 4 \cdot \frac{2|x-3|-3}{2} &> 4 \cdot (-2) \Leftrightarrow |x-3|-2-2 \cdot (2|x-3|-3) \\ &> -8 \Leftrightarrow |x-3|-2-4|x-3|+6 > -8 \Leftrightarrow |x-3|-4|x-3| \\ &> -8-6+2 \Leftrightarrow -3|x-3| > -12 \Leftrightarrow \\ \frac{-3|x-3|}{-3} < \frac{-12}{-3} &\Leftrightarrow |x-3| < 4 \Leftrightarrow -4 < x-3 < 4 \Leftrightarrow -4+3 < x < 4+3 \Leftrightarrow -1 < \\ x < 7 &\text{οπότε } x \in (-1, 7). \end{aligned}$$

B3.

Οι ακέραιοι αριθμοί όταν το $x \in (-1, 7)$ είναι 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Από αυτούς μη μηδενικά πολλαπλάσια του αριθμού 3 είναι το 3 και το 6. Οπότε $\alpha_1 = 3$ και $\alpha_2 = 6$. Η γεωμετρική

πρόοδος έχει πρώτο όρο $\alpha_1 = 3$ και λόγο $\lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 2$. Είναι

$$\alpha_6 = \alpha_1 \cdot \lambda^{6-1} = 3 \cdot 2^5 = 3 \cdot 32 = 96$$

B4.

Το $x \in (-1, 7)$ έτσι έχουμε:

$$\bullet \quad -1 < x < 7 \xrightarrow{+4} -1 < x+4 < 7+4 \Leftrightarrow 3 < x+4 < 11 \text{ οπότε } x+4 > 3 \Rightarrow x+4 > 0$$

$$\text{άρα } |x+4| = x+4$$

$$\bullet \quad -1 < x < 7 \xrightarrow{-8} -8-1 < x-8 < -8+7 \Leftrightarrow -9 < x-8 < -1 \text{ οπότε } x-8 < 0 \text{ άρα}$$

$$|x-8| = -x+8$$

$$\Gamma = |x+4| - 2|x-8| = x+4 - 2(-x+8) = x+4+2x-16 = 3x-12$$

ΘΕΜΑ Γ

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \frac{x^2 - \alpha x + \beta}{|x+1| - 2}$$

Γ1.

$$(\alpha-1)^4 - 81 = 0 \Leftrightarrow (\alpha-1)^4 = 81 \Leftrightarrow \alpha-1 = \pm \sqrt[4]{81} \Leftrightarrow \alpha-1 = \pm 3 \Leftrightarrow$$

$$\alpha-1 = 3 \text{ ή } \alpha-1 = -3 \Leftrightarrow \alpha = 4 \text{ ή } \alpha = -2$$

Οπότε $\alpha = 4$

Γ2.

Έχουμε $f(x) = \frac{x^2 - 4x + \beta}{|x+1| - 2}$ και αφού η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το

$$f(-1) = -4 \Leftrightarrow \frac{(-1)^2 - 4(-1) + \beta}{|-1+1| - 2} = -4 \Leftrightarrow \frac{1+4+\beta}{-2} = -4 \Leftrightarrow$$

$$A(-1, -4), \text{ τότε: } 5 + \beta = 8 \Leftrightarrow \beta = 3$$

Γ3.

Η $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{|x+1| - 2}$ για να ορίζεται πρέπει, $|x+1| - 2 \neq 0 \Leftrightarrow$

$|x+1| \neq 2 \Leftrightarrow x+1 \neq 2 \text{ και } x+1 \neq -2 \Leftrightarrow x \neq 1 \text{ και } x \neq -3$. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι $D_f = (-\infty, -3) \cup (-3, 1) \cup (1, +\infty)$

Έχουμε $x > 1 \Leftrightarrow x+1 > 2$ άρα $x+1 > 0$ οπότε $|x+1| = x+1$

Έχουμε $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{|x+1| - 2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{x+1-2} = \frac{(x-3)(x-1)}{x-1} = x-3$

Γ4.

Είναι $f(5) = 5-3 = 2$ και $f(6) = 6-3 = 3$. Η ανίσωση γίνεται: $2x^2 - 3x + 1 \leq 0$.

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1, \quad x_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2022
Β' ΦΑΣΗ

E_3.Μλ1Α(α)

Τιμές x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$2x^2 - 3x + 1$	+	•	•	+

Από τον πίνακα προσήμου βλέπουμε ότι $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Για να έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες πρέπει η διακρίνουσα

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow [-(2\lambda - 1)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot \lambda(\lambda - 2) > 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 - 4\lambda^2 + 8\lambda > 0 \Leftrightarrow$$

$$4\lambda + 1 > 0 \Leftrightarrow \lambda > -\frac{1}{4}$$

Δ2.

Για $\lambda=1$ η εξίσωση γίνεται $x^2 - x - 1 = 0$

$$\alpha) S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-1}{1} = 1, P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{-1}{1} = -1 \text{ και}$$

$$A = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2}{x_1 x_2} + \frac{x_1}{x_1 x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{1}{-1} = -1$$

β) Να βρείτε την εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει για λύσεις τους αριθμούς $\rho_1 = x_1 + \frac{1}{x_1}$,

$$\rho_2 = x_2 + \frac{1}{x_2}$$

Έχουμε $\rho_1 + \rho_2 = x_1 + \frac{1}{x_1} + x_2 + \frac{1}{x_2} = (x_1 + x_2) + \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \right) = 1 - 1 = 0$ και

$$\begin{aligned} \rho_1 \cdot \rho_2 &= \left(x_1 + \frac{1}{x_1} \right) \left(x_2 + \frac{1}{x_2} \right) = x_1 x_2 + \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{1}{x_1 x_2} = \\ &= x_1 x_2 + \frac{(x_1)^2 + (x_2)^2}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_1 x_2} = x_1 x_2 + \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_1 x_2} = \\ &= -1 + \frac{1^2 - 2(-1)}{-1} + \frac{1}{-1} = -1 - 3 - 1 = -5 \end{aligned}$$

Οπότε η εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει για λύσεις τους αριθμούς $\rho_1 = x_1 + \frac{1}{x_1}$ και

$\rho_2 = x_2 + \frac{1}{x_2}$ είναι η $x^2 - (\rho_1 + \rho_2)x + (\rho_1 \cdot \rho_2) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5 = 0$

Δ3.

Για να αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ πρέπει η διακρίνουσα

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow [-(2\lambda - 1)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot \lambda(\lambda - 2) < 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 - 4\lambda^2 + 8\lambda < 0 \Leftrightarrow$$

$$4\lambda + 1 < 0 \Leftrightarrow \lambda < -\frac{1}{4}$$