ΤΑΞΗ: **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΑΛΓΕΒΡΑ/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

Ημερομηνία: Τετάρτη 19 Απριλίου 2017

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$, τότε για οποιαδήποτε $\theta_1, \theta_2 > 0$ να αποδείξετε ότι ισχύει: $log_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = log_\alpha \theta_1 + log_a \theta_2$.

Μονάδες 15

Α2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη ***Σωστό***, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη ***Λάθος***, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν το άθροισμα δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι μη μηδενικό πολυώνυμο, τότε ο βαθμός του είναι πάντα ίσος με τον μέγιστο των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.

β) Αν για μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(1) < f(2)$, τότε η f είναι υποχρεωτικά γνησίως αύξουσα στο σύνολο $\mathbb{R}$.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(x) = \varphi(x+c)$, όπου c θετική σταθερά, προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ κατά c μονάδες προς τα αριστερά.

δ) Αν $x \neq 0$, τότε ισχύει πάντα $l\,og\,x^2 = 2 \cdot l\,og\,x$.

ε) Υπάρχουν τιμές του $x \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε να ισχύει, $e^{-x} < 0$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 \cdot \eta\mu\left(\frac{x}{2}\right)$, $x \in \mathbb{R}$ και η παράσταση

$$A = \frac{-\sigma\upsilon\nu(\pi+\theta)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{19\pi}{2}-\theta\right)\cdot\sigma\varphi(\pi-\theta)\cdot\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\sigma\upsilon\nu(\pi-\theta)\cdot\eta\mu(\pi+\theta)\cdot\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cdot\varepsilon\varphi(2\pi+\theta)}.$$

Β1. Να δείξετε ότι $A = 1$.

Μονάδες 8

Β2. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f. Στη συνέχεια, να βρείτε την περίοδο της f και να κάνετε τη γραφική της παράσταση σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.

Μονάδες 8

Β3. Να βρείτε τα $x \in \mathbb{R}$, για τα οποία ισχύει $f(x) = A$, όπου A η τιμή της παράστασης του ερωτήματος Β1.

Μονάδες 6

Β4. Να συγκρίνετε τις τιμές $f\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ και $f\left(\frac{11\pi}{6}\right)$.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (\lambda^2 - 1)x^4 - (\lambda - 1)x^3 + \lambda x^2 - 7x + \lambda^2 + 5,\ \lambda \in \mathbb{R}$ το οποίο είναι τρίτου ($3^{ου}$) βαθμού.

Γ1. Να βρείτε τον αριθμό λ.

Μονάδες 6

Για $\lambda = -1$

Γ2. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ τέμνει τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 6

Γ3. Έστω, επίσης, το πολυώνυμο $Q(x) = x^3 - (\mu + 1)x^2 + (\mu - 1)x + 2,\ \mu \in \mathbb{R}$ το οποίο έχει παράγοντα το $x - 2$.

α) Να δείξετε ότι $\mu = 2$ (Μονάδες 4) και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του $Q(x)$ δια του $x + 3$ (Μονάδες 2).

Μονάδες 6

β) Να λύσετε την ανίσωση: $\dfrac{x^2 - 6x + 19}{Q(x) + 55} + \dfrac{2x^2 + x - 6}{P(x)} < 0$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(1-\dfrac{1}{\ln\alpha}\right)^x$.

Δ1. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση f ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$. (Μονάδες 3) Για ποιές από αυτές τις τιμές η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$; (Μονάδες 2)

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f(-x)=\dfrac{1}{f(x)}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (Μονάδα 1) και στη συνέχεια, αν $0<\alpha<1$, να λύσετε την ανίσωση $f(e^x)\cdot f\left(-\dfrac{1}{2}\right)>1$. (Μονάδες 3)

Μονάδες 4

Δ3. Δίνεται ότι η τιμή της παραμέτρου α είναι ίση με:

$$\alpha=\frac{1}{2}\log_3 81+\log_3 15-\log_3 5-e^{\frac{1}{2}\ln 9}+e^{-\frac{\ln 2}{\ln 4}}.$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=e^{-\frac{1}{2}}$ (Μονάδες 3) και να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f. (Μονάδα 1)

Μονάδες 4

β) Να λύσετε την ανίσωση: $\ln 2+\ln\left(f(2x)\right)<x\ln 2+\ln\left(2^x+f(x)\right)$

Μονάδες 6

γ) Αφού αποδείξετε ότι $\left(2+\sqrt{f(1)}\right)\cdot\left(2-\sqrt{f(1)}\right)=1$ (Μονάδα 1), να λύσετε την εξίσωση: $\left(2+\sqrt{f(1)}\right)^x+\left(2-\sqrt{f(1)}\right)^x=4$. (Μονάδες 5)

Μονάδες 6

Σας ευχόμαστε επιτυχία στις εξετάσεις

ΤΕΛΟΣ ΘΕΜΑΤΩΝ