



ΤΕΕ Β' ΚΥΚΛΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

i. $v=100$

ΕΤΗ	v_i	N_i	f_i	F_i	$f_i \cdot 360^0$	ΚΕΝΤΡΟ ΚΛΑΣΕΩΝ O_i	$O_i \cdot v_i$
[0,5)	10	10	0,1	0,1	36^0	2,5	25
[5,10)	15	25	0,15	0,25	54^0	7,5	112,5
[10,15)	40	65	0,4	0,65	144^0	12,5	500
[15,20)	20	85	0,2	0,85	72^0	17,5	350
[20,25)	10	95	0,1	0,95	36^0	22,5	225
[25,30)	5	100	0,05	1	$x^0=18^0$	27,5	137,5
ΣΥΝΟΛΟ	$v=100$		1		360^0		1350

Άρα $36+54+144+72+36+x=360 \Leftrightarrow x=18^0$ και

$$f_1 = \frac{36}{360} = 0,1$$

$$f_2 = \frac{54}{360} = 0,15$$

$$f_3 = \frac{144}{360} = 0,4$$

$$f_4 = \frac{72}{360} = 0,2$$

$$f_5 = f_1 = 0,1$$

$$f_6 = \frac{18}{360} = 0,05$$

$$f_i = \frac{v_i}{v} \Leftrightarrow v_i = f_i \cdot v, \text{ επομένως:}$$

$$v_1 = 0,1 \cdot 100 = 10$$

$$v_2 = 0,15 \cdot 100 = 15$$

$$v_3 = 0,4 \cdot 100 = 40$$

$$v_4 = 0,2 \cdot 100 = 20$$

$$v_5 = 0,1 \cdot 100 = 10$$

$$v_6 = 0,05 \cdot 100 = 5$$

ii. μέση τιμή: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^6 O_i \cdot v_i}{v} = \frac{1350}{100} = 13,5$ έτη

iii. τουλάχιστον 10 έτη εργάζονται: $40+20+10+5=75$ υπάλληλοι.

ΘΕΜΑ 2ο

$$f(x) = x^2 - 2\ln x, \quad x > 0$$

$$i. f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x}, \quad x > 0$$

$$ii. f(1) = 1$$

$$f'(1) = 0$$

$$iii. f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 2}{x} = 0 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} 2x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
f'(x)			-	+
f(x)			○ E	↗

Παρατηρούμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x > 1$.

iv. Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=1$ το $f(1)=1$.

ΘΕΜΑ 3ο**A.**

$$i. f(x) = ax^3 + \beta x^2 + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Ισχύει } f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \text{ και } f(-1) = -6, \text{ άρα } f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow a \cdot \frac{1}{8} + \beta \cdot \frac{1}{4} + 1 = 0 \Leftrightarrow a + 2\beta + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow a + 2\beta = -8 \quad (1) \text{ και}$$

$$f(-1) = -6 \Leftrightarrow -a + \beta + 1 = -6 \Leftrightarrow a - \beta = 7 \quad (2)$$

Αφαιρώντας την (2) από την (1) έχουμε: $3\beta = -15 \Leftrightarrow \beta = -5$ και $a = 2$.

Συνεπώς $(a, \beta) = (2, -5)$.

$$ii. \text{ Επομένως } f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 1 \text{ με } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x)}{2x^2 + x - 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^3 - 5x^2 + 1}{2x^2 + x - 1} \quad (1)$$

Horner 1

2	-5	0	1	$\frac{1}{2}$
↓	1	-2	-1	
2	-4	-2	0	
$(2x^2 - 4x - 2)\left(x - \frac{1}{2}\right)(2)$				

Horner 2

2	1	-1	$\frac{1}{2}$
↓	1	1	
2	2	0	
$(2x+2)\left(x - \frac{1}{2}\right)(3)$			

$$\begin{aligned} \text{Από (1), (2), (3): } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(2x^2 - 4x - 2)(x - \frac{1}{2})}{(2x + 2)(x - \frac{1}{2})} &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 4x - 2}{2x + 2} = \\ &= \frac{2 \cdot \frac{1}{4} - 2 - 2}{3} = \frac{\frac{1}{2} - 4}{3} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{8}{2}}{3} = \frac{-\frac{7}{2}}{3} = -\frac{7}{6} \end{aligned}$$

$$\text{B. } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1} - x + 1}{x^3 - 27}, & -1 \leq x \neq 3 \\ a^2 - 1, & x = 3 \end{cases}$$

i. $D_f = [-1, +\infty)$

ii. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - (x-1)}{x^3 - 27} =$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{[\sqrt{x+1} - (x-1)] \cdot [\sqrt{x+1} + (x-1)]}{(x^2 + 3x + 9)(x-3) \cdot [\sqrt{x+1} + (x-1)]} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1 - (x-1)^2}{(x^2 + 3x + 9)(x-3) \cdot [\sqrt{x+1} + (x-1)]} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1 - x^2 + 2x - 1}{(x^2 + 3x + 9)(x-3) \cdot [\sqrt{x+1} + (x-1)]} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-x^2 + 3x}{(x^2 + 3x + 9)(x-3) \cdot [\sqrt{x+1} + (x-1)]} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-x(x-3)}{(x^2 + 3x + 9) \cdot (x-3) \cdot [\sqrt{x+1} + (x-1)]} = \frac{-3}{27 \cdot 4} = \frac{-1}{36} = -\frac{1}{36}$$

iii. Αφού f συνεχής στο $x_0=3$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$ με $f(3) = a^2 - 1$. Άρα $a^2 - 1 = -\frac{1}{36}$

$$\Leftrightarrow 36a^2 - 36 = -1 \Leftrightarrow 36a^2 - 35 = 0 \Leftrightarrow a^2 = \frac{35}{36} \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{36}} = \frac{\sqrt{35}}{6} \text{ ή}$$

$$a = -\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{36}} = -\frac{\sqrt{35}}{6}.$$

ΘΕΜΑ 4ο

- i. Συνάρτηση εσόδων από την πώληση x αεροσκαφών:

$$\text{Έστω } f(x) = x \cdot E(x) = 3x^2 + 20x$$

- Συνάρτηση κέρδους από την πώληση x αεροσκαφών:

$$K(x) = -x^2 + 20x - 30$$

Γνωρίζουμε ότι: ΚΕΡΔΟΣ = ΕΣΟΔΑ - ΕΞΟΔΑ, δηλαδή $K(x) = f(x) - P(x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow P(x) = f(x) - K(x) = 3x^2 + 20x + x^2 - 20x + 30 = 4x^2 + 30, \quad 0 \leq x \leq 20$$

- ii. $P(5) = 4 \cdot 25 + 30 = 130$ χιλιάδες €
 iii. $P(6) - P(5) = 174 - 133 = 41$ χιλιάδες €
 iv. $K'(x) = -2x + 20$ χιλιάδες € / μονάδες προϊόντος
 v. $K'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 20 = 0 \Leftrightarrow x = 10$

x	0	10	20
$P'(x)$		+	-
$P(x)$			

M

Επομένως το εργοστάσιο πρέπει να κατασκευάζει 10 αεροπλάνα κατ' έτος για να έχει το μέγιστο κέρδος.