Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1

Β) α) Σωστό **β)** Λάθος **γ)** Σωστό **δ)** Λάθος **ε)** Λάθος

Θέμα 2

α) $\left|\dfrac{w-i}{w+i}\right| = \left|\dfrac{\dfrac{z+i}{1+iz}-i}{\dfrac{z+i}{1+iz}+1}\right| = \left|\dfrac{z+i-i-i^2z}{z+i+i+i^2z}\right| = \left|\dfrac{2z}{2i}\right| = |z|$

β) Λόγω (α) ερωτήματος έχουμε: $|w-i| = |w+i|$. Αν $w = x+yi$ τότε

$|x+yi-i| = |x+yi+i| \Leftrightarrow |x+(y-1)i| = |x+(y+1)i| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2} = \sqrt{x^2+(y+1)^2} \Leftrightarrow x^2+y^2-2y+1 = x^2+y^2+2y+1 \Leftrightarrow y=0$

Άρα το σημείο Μ ανήκει στον x΄x.

γ) $w \in I \Leftrightarrow w = -\bar{w} \Leftrightarrow \dfrac{z+i}{1+iz} = -\dfrac{\bar{z}-i}{1-i\bar{z}} \Leftrightarrow$

$(z+i)(1-i\bar{z}) = -(1+iz)\cdot(\bar{z}-i) \Leftrightarrow$

$z+i-iz\bar{z}+\bar{z} = -(\bar{z}+iz\bar{z}-i+z) \Leftrightarrow$

$z+i-iz\bar{z}+\bar{z} = -\bar{z}-iz\bar{z}+i-z \Leftrightarrow 2z = -2\bar{z} \Leftrightarrow z = -\bar{z} \Leftrightarrow z \in I$.

δ) Έχουμε $f(\beta)i = \dfrac{f(a)i+i}{1+i^2f(a)} \Leftrightarrow f(\beta) = \dfrac{f(a)+1}{1-f(a)} < 0$ διότι $f(a) > 1$

Άρα $f(a)\cdot f(\beta) < 0$. Η f είναι συνεχής στο $[a,\beta]$.

Σύμφωνα με το θ. Bolzano η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο (a,β).

Θέμα 3

α) $f'(x)=e^x-a$ οπότε $f'(0)=1-a$

$\varepsilon: y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow$

$y=(1-a)x$

β) Είναι $f'(x)\ge 0\Leftrightarrow e^x\ge a\Leftrightarrow x\ge \ln a$

x	$-\infty$	$\ln a$	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Η f στο $x_0=\ln a$ παρουσιάζει ελάχιστο το

$g(a)=e^{\ln a}-a\ln a-1=a-a\ln a-1$

Επειδή $g'(a)=1-\ln a-1=-\ln a<0$ για κάθε $a\in(1,+\infty)$ και g συνεχής στο $[1,+\infty)$ η g είναι $\downarrow$ στο $[1,+\infty)$ οπότε για κάθε $a>1$ ισχύει

$g(a)<g(1)=0$

γ) i) $E(a)=\int_0^a \left|f(x)-(1-a)x\right|dx$. Επειδή η f είναι κυρτή διότι

$f''(x)=e^x>0$ και η $\psi=(1-\alpha)x$ εφαπτομένη της c_f στο $(0,f(0))$, ισχύει :

$f(x)\ge(1-a)x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Άρα $E(a)=\int_0^a\left(e^x-ax-1-x+ax\right)dx=\int_0^a\left(e^x-x-1\right)dx$

$$=\left[e^x-\frac{x^2}{2}-x\right]_0^a = e^a-\frac{a^2}{2}-a-1 \text{ τ.μ.}$$

ii) $E(a)=a^2\left(\frac{e^a}{a^2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}\right)$. Είναι $\lim\limits_{a\to+\infty}\frac{e^a}{a^2}=\lim\limits_{a\to+\infty}\frac{\left(e^a\right)'}{\left(a^2\right)'}$

$$=\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{e^a}{2a}=\lim_{a\to+\infty}\frac{\left(e^a\right)'}{(2\alpha)'}=\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{e^a}{2}=+\infty$$. Επομένως $\lim\limits_{a\to+\infty}E(a)=+\infty$

Θέμα 4

α) Θέτουμε $x \cdot t = u$ τότε $(xt)'dt = du \Leftrightarrow x\,dt = du$ οπότε

για κάθε $x \neq 0$ είναι $dt = \frac{1}{x}du$

- Για $t = 0$ είναι $u = 0$ και για $t = 1$ είναι $u = x$.

Άρα $g(x) = \int_0^x \frac{u}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot f(u)dx = \frac{1}{x^2}\int_0^x u\,f(u)du$

Επειδή το ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο της μεταβλητής ολοκλήρωσης, έχουμε.

$$g(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^x t\,f(t)dt, \quad x \neq 0$$

β) Η g είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, όταν $\lim_{x \to 0} g(x) = g(0)$.

Είναι $g(0) = \int_0^1 t\,f(0)\,dt = f(0)\int_0^1 t\,dt = f(0)\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}f(0)$

Επειδή $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$ και $\lim_{x \to 0} \int_0^x t\ f(t)dt = \int_0^0 t\,f(t)dt = 0$

(Η $\int_0^x t\,f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής)

σύμφωνα με το θ. De L΄ Hospital έχουμε

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\int_0^x t\,f(t)dt\right)'}{(x^2)'} = \lim_{x \to 0} \frac{x\,f(x)}{2x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{2} = \frac{f(0)}{2}$$

διότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ Άρα $\lim_{x \to 0} g(x) = g(0)$

που σημαίνει ότι η g είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

γ) Για κάθε $x > 0$ η ανισότητα γράφεται:

$$x \cdot \frac{1}{x^2}\int_0^x t\,f(t)dt < \int_0^x \cdot f(t)dt \Leftrightarrow \frac{1}{x}\int_0^x t\,f(t)dt < \int_0^x f(t)dt \Leftrightarrow$$

$$\int_0^x t\,f(t)dt < x\int_0^x f(t)dt \Leftrightarrow \int_0^x t\,f(t)dt - x\int_0^x f(t)dt < 0$$

Έστω η συνάρτηση:

$$h(x) = \int_0^x t\,f(t)dt - x\int_0^x f(t)dt,\ x \geq 0$$

$$h'(x)=x\cdot f(x)-\int_0^x f(t)dt-x\cdot f(x)=-\int_0^x f(t)dt<0$$ για κάθε χ>0.

διότι από $f(t)>0$ προκύπτει ότι:

$\int_0^x f(t)dt>0$ για κάθε χ>0.

Η h είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ (πράξεις συνεχών συναρτήσεων)

Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$. Επομένως για κάθε χ>0 ισχύει $h(x)<h(0)$ Αλλά $h(0)=\int_0^0 t\, f(t)dt=0$ συνεπώς

$g(x)<0$ για κάθε χ>0.

δ) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[1,2]$ και ισχύει:

$$g(2)=\frac{1}{4}\int_0^2 t\cdot f(t)dt=\frac{1}{4}\left(\int_0^1 t\cdot f(t)dt+\int_1^2 t\cdot f(t)dt\right)=\int_0^1 t\cdot f(t)dt=g(1).$$

Σύμφωνα με το Θ. Rolle υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιος ώστε $g'(\xi)=0$.

Με παραγώγιση των μελών της $x^2g(x)=\int_0^x t\cdot f(t)dt$ έχουμε:

$2x\cdot g(x)+x^2g'(x)=x\cdot f(x)\overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow}2g(x)+x\cdot g'(x)=f(x)$ οπότε για $x=\xi$ προκύπτει: $2g(\xi)+\xi\cdot g'(\xi)=f(\xi)\Leftrightarrow 2g(\xi)=f(\xi)$