ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Ο.Ε.Φ.Ε. 2004

Θέματα Άλγεβρας Β΄ Λυκείου
Γενικής Παιδείας

ΖΗΤΗΜΑ $1^{Ο}$

Α. Απαντήστε (χωρίς αιτιολόγηση) στα επόμενα ερωτήματα.

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2004 \cdot \sigma\upsilon\nu(4x)$. Γράψτε τη μέγιστη τιμή, την ελάχιστη τιμή και την περίοδο της συνάρτησης. **(3 μονάδες)**
2. Αν α, β δύο ομόσημοι πραγματικοί αριθμοί, ονομάζουμε γεωμετρικό μέσο των α, β τον αριθμό
   - $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$
   - $\alpha\beta$
   - $\pm\sqrt{\alpha\beta}$
   - $\sqrt{\alpha\beta}$ **(3 μονάδες)**
3. Συμπληρώστε σωστά την επόμενη πρόταση: Το σημείο τομής της ευθείας $y = e^2$ και της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y = (\frac{1}{e})^x$ είναι ………. **(3 μονάδες)**
4. Είναι σωστός ή λάθος, ο ισχυρισμός ότι «το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το x, είναι ο αριθμός $P(0)$». **(3 μονάδες)**

Β. Έστω α, κ, δύο πραγματικοί αριθμοί με $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ και $k > 0$.

1. Τι ονομάζουμε «λογάριθμο του κ ως προς βάση α»; **(1 μονάδα)**
2. Δείξτε ότι $\log_a 1 = 0$ και $\log_a a = 1$ **(2 μονάδες)**

Γ. Δίνεται η πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_\nu \chi^\nu + \alpha_{\nu-1}\chi^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1\chi + \alpha_0 = 0$, με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος αριθμός $\boldsymbol{\kappa \neq 0}$ είναι λύση της εξίσωσης, να δείξετε ότι το κ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου a_0. Ισχύει το αντίστροφο; (Δικαιολογήστε την απάντησή σας). **(7 μονάδες)**

Δ. Να συγκριθούν οι θετικοί αριθμοί x, y, αν είναι γνωστό ότι, για $a \in (1,+\infty)$, ισχύει $(\frac{1}{a})^{\ln x} > (\frac{1}{a})^{\ln y}$. **(3 μονάδες)**

ΖΗΤΗΜΑ $2^{Ο}$

Α. Αν $\mathrm{A} = \dfrac{1-\eta\mu 2\theta}{(\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta)^2}$ Να δείξετε ότι Α=1. **(10 μονάδες)**

Β. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί $x \in [0,\pi]$ για τους οποίους:

$2\eta\mu^3 x - 4\eta\mu\frac{x}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{x}{2} + \sigma\upsilon\nu^2 x = 0$ **(15 μονάδες)**

ΖΗΤΗΜΑ 3^{o}

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - (a+1)x^3 + bx^2 - bx + a$, με $a, b \in R, a \neq 0$, για το οποίο είναι γνωστό ότι έχει παράγοντα το $(x-1)^2$ και ρίζα το 2.

1. Βρείτε τους αριθμούς a, b **(11 μονάδες)**
2. Αν a=6, b=17 και x_1, x_2, x_3 οι ρίζες του $P(x)$ με $x_1 < x_2 < x_3$, δείξτε ότι οι αριθμοί x_1, x_2, x_3, με τη σειρά που αναφέρονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου, ενώ οι αριθμοί $e^{x_1}, e^{x_2}, e^{x_3}$, επίσης με τη σειρά που αναφέρονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. **(6 μονάδες)**
3. Να βρεθούν τρεις αριθμοί β_1, β_2, β_3 ενδιάμεσοι των e^{X_1} και e^{X_2} ώστε και οι πέντε να αποτελούν διαδοχικούς όρους της ίδιας Γεωμετρικής Προόδου. **(8 μονάδες)**

ΖΗΤΗΜΑ 4^{o}

Έστω x, y θετικοί αριθμοί, με $x \neq 1$.

1. Δείξτε ότι ισχύει: $\ln y \cdot \log x = \log y \cdot \ln x$ **(5 μονάδες)**
2. Αν ισχύει η ισότητα $\left(\frac{\ell ny}{\ell nx}\right)^2 - 4\frac{\ell ogy}{\ell ogx} + 4 = 0$ βρείτε ποια σχέση συνδέει τους αριθμούς x, y. **(8 μονάδες)**
3. Αν είναι $y = x^2$ και το y είναι λύση της εξίσωσης $e^{2y^2-3y+1} = (2004)^0$, να βρείτε τους αριθμούς x, y. **(5 μονάδες)**
4. Αν για το πολυώνυμο $P(x) = x^2 - 4x + 4$ ισχύει $P(\ln x) \leq 1$, να δείξετε ότι $y \in [e^2, e^6]$ **(7 μονάδες)**