ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΥΡΙΑΚΗ 22 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2001
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

## ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.

α) Να αποδείξετε ότι αν $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

**ΜΟΝΑΔΕΣ 9**

β) Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τι συμπεραίνετε για τη μονοτονία της f ;

**ΜΟΝΑΔΕΣ 3,5**

Β. α) Για τη συνάρτηση f ισχύουν: $f''(x)-f(x)=0$ για κάθε $x\in \mathbb{R}$ και $f(0)=f'(0)$. Να αποδείξετε ότι :

i) Η συνάρτηση $g(x)= [f(x)]^2 -[f'(x)]^2 + 2001$ είναι σταθερή.

**ΜΟΝΑΔΕΣ 3**

ii) $g(x)=2001$, για κάθε $x\in \mathbb{R}$.

**ΜΟΝΑΔΕΣ 2**

β) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

i) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σ' αυτό, τότε $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\Delta$.

**ΜΟΝΑΔΕΣ 2**

ii) Αν $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε τα σημεία Α(1,2) και Β(2, –4) ανήκουν και τα δύο στη γραφική παράσταση της f.

**ΜΟΝΑΔΕΣ 2,5**

iii) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\Delta$, τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ.

**ΜΟΝΑΔΕΣ 3**



## ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ο μιγαδικός z και έστω $f(z)=\dfrac{2+i\bar{z}}{1-\bar{z}}$, $z\neq 1$

α) Να βρείτε το μέτρο και ένα όρισμα του μιγαδικού f(2).

**ΜΟΝΑΔΕΣ 4**

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $w=[f(2)]^{2004}$ είναι πραγματικός.

**ΜΟΝΑΔΕΣ 4**

γ) Να αποδείξετε ότι: $\left|\dfrac{f(z)-2}{f(z)+i}\right|=|z|$

**ΜΟΝΑΔΕΣ 8**

δ) Αν $|z|=1$ και Μ είναι η εικόνα του f(z) στο μιγαδικό επίπεδο, να αποδείξετε ότι το Μ ανήκει σε ευθεία, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

**ΜΟΝΑΔΕΣ 9**

**ΘΕΜΑ 3ο**

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{(\alpha-1)x+6}{x+\beta} \quad \text{με } x \in (-1, +\infty),$$

με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, η οποία έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $y=2$ και $x=-1$.

α) Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι

$$f(x) = \frac{2x+6}{x+1}, \quad x > -1.$$

**ΜΟΝΑΔΕΣ 9**

β) Να βρείτε συνάρτηση $G(x)$ τέτοια ώστε $G'(x) = f(x)$, για κάθε $x > -1$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται απο το σημείο $M(0,2)$.

**ΜΟΝΑΔΕΣ 9**

γ) Να μελετήσετε τη μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης $h(x) = \dfrac{G(x)}{x+1}$, $x > -1$.

**ΜΟΝΑΔΕΣ 7**



μ

**ΘΕΜΑ 4ο**

Δίνονται οι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f, g τέτοιες ώστε να ισχύει:

$$\int_1^x f(t)\,dt + \int_x^1 g(t)\,dt = x^2 - 2x + 1, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

και έστω $C_f$, $C_g$ οι γραφικές τους παραστάσεις.

Έστω ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο λύσεις $\varrho_1$, $\varrho_2$ με $\varrho_1 < 1 < \varrho_2$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) Η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $(\varrho_1, \varrho_2)$.

**ΜΟΝΑΔΕΣ 4**

ii) υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\varrho_1, \varrho_2)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = -2$.

**ΜΟΝΑΔΕΣ 5**

β) Αν η συνάρτηση g είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

i) Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

**ΜΟΝΑΔΕΣ 4**

ii) Η f έχει ένα μόνο ελάχιστο στο $\mathbb{R}$, το οποίο παρουσιάζεται στο σημείο $x_0=\xi$ του ερωτήματος α) ii).

**ΜΟΝΑΔΕΣ 5**

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις $C_f$, $C_g$ και τον άξονα των y.

**ΜΟΝΑΔΕΣ 7**



μ