

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

- A.1. Θεωρία, σχ. βιβλίο σελ. 31
A.2. α) Θεωρία, σχ. βιβλίο σελ. 65
β) Θεωρία, σχ. βιβλίο σελ. 86-87
A.3. α. Λ β. Λ γ. Σ δ. Σ

ΘΕΜΑ Β

B.1. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + \frac{1}{3}, x \in \mathbb{R}$
 $f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + \frac{1}{3}\right)' = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' - (3x^2)' + (5x)' + \left(\frac{1}{3}\right)' = x^2 - 6x + 5, x \in \mathbb{R}$

B.2. $f'(x) = x^2 - 6x + 5, x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$$

Η εξίσωση είναι της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ όπου $\alpha = 1, \beta = -6, \gamma = 5$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 36 - 20 = 16 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 4}{2}, \quad x_1 = \frac{6+4}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ και } x_2 = \frac{6-4}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-5) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 < 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-5) < 0 \Leftrightarrow x \in (1, 5)$$

$$f(1) = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 5 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} - 3 + 5 + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} + 2 = \frac{2}{3} + \frac{6}{3} = \frac{8}{3}$$

$$f(5) = \frac{1}{3} \cdot 5^3 - 3 \cdot 5^2 + 5 \cdot 5 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot 125 - 3 \cdot 25 + 25 + \frac{1}{3} = \frac{125}{3} - 75 + 25 + \frac{1}{3} = \frac{126}{3} - 50 = 42 - 50 = -8$$

Η μονοτονία της συνάρτησης προκύπτει από τον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	○	+
f	↗	ΤΟΠ.ΜΕΓ.	ΤΟΠ.ΕΛ.	↗

Η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = 1$ το $f(1) = \frac{8}{3}$

και τοπικό ελάχιστο για $x = 5$ το $f(5) = -8$.

B.3. $f(0) = \frac{1}{3} \cdot 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

Ζητάμε την εξίσωση εφαπτομένης της f στο σημείο της $M\left(0, \frac{1}{3}\right)$, η οποία είναι της μορφής

$$y = \alpha x + \beta.$$

$$\alpha = f'(0) = 0^2 - 6 \cdot 0 + 5 = 5$$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης παίρνει την μορφή $y = 5x + \beta$.

Το σημείο $M\left(0, \frac{1}{3}\right)$ ανήκει στην ευθεία της εφαπτομένης, άρα οι συντεταγμένες του θα

επαληθεύουν την εξίσωσή της. Δηλαδή $\frac{1}{3} = 5 \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{3}$.

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο της $M\left(0, \frac{1}{3}\right)$ είναι $y = 5x + \frac{1}{3}$.

B.4. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = f'(-1) = (-1)^2 - 6 \cdot (-1) + 5 = 1 + 6 + 5 = 12$

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1. Βρίσκουμε τις ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $x^2 + 6x - 7 = 0$.

Η εξίσωση είναι της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ όπου $\alpha = 1$, $\beta = 6$, $\gamma = -7$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7) = 36 + 28 = 64 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-6 \pm 8}{2} = \begin{cases} \frac{-6-8}{2} = \frac{-14}{2} = -7 \\ \frac{-6+8}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

$$\text{Άρα } x^2 + 6x - 7 = (x-1)(x+7)$$

$$\text{Επομένως έχουμε } s = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 6x - 7}{2x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+7)}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+7}{2} = \frac{1+7}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\text{Γ.2. } CV = 20\% \Leftrightarrow \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{2}{10} \Leftrightarrow \frac{4}{|\bar{x}|} = \frac{2}{10} \Leftrightarrow 2|\bar{x}| = 40 \Leftrightarrow |\bar{x}| = 20 \Leftrightarrow \bar{x} = 20 \text{ ή } \bar{x} = -20$$

Για $\bar{x} = -20$ έχουμε

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i}{5} \Leftrightarrow -20 = \frac{22 + 18 + 20 + \kappa + 14 + 16}{5} \Leftrightarrow 90 + \kappa = -100 \Leftrightarrow \kappa = -190$$

Οι παρατηρήσεις παίρνουν τις τιμές:

$$22, 18, 20, -190, 14, 16 \text{ δηλαδή } 22, 18, -170, 14, 16$$

Με

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{\frac{(22+20)^2 + (18+20)^2 + (-170+20)^2 + (14+20)^2 + (16+20)^2}{5}} = \\ &= \sqrt{\frac{42^2 + 38^2 + (-150)^2 + 34^2 + 36^2}{5}} = \sqrt{\frac{1764 + 1444 + 22500 + 1156 + 1296}{5}} = \\ &= \sqrt{\frac{28160}{5}} = \sqrt{5632} \neq 4 \end{aligned}$$

Η τιμή $\bar{x} = -20$ απορρίπτεται αφού δίνει τιμή τυπικής απόκλισης $s \neq 4$

Για $\bar{x} = 20$ έχουμε

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i}{5} \Leftrightarrow 20 = \frac{22 + 18 + 20 + \kappa + 14 + 16}{5} \Leftrightarrow 90 + \kappa = 100 \Leftrightarrow \kappa = 10$$

Οι παρατηρήσεις παίρνουν τις τιμές:

$$22, 18, 20+10, 14, 16 \text{ δηλαδή } 22, 18, 30, 14, 16$$

Με

$$\begin{aligned}
 s &= \sqrt{\frac{(22-20)^2 + (18-20)^2 + (30-20)^2 + (14-20)^2 + (16-20)^2}{5}} = \\
 &= \sqrt{\frac{2^2 + (-2)^2 + 10^2 + (-6)^2 + (-4)^2}{5}} = \sqrt{\frac{4+4+100+36+16}{5}} = \\
 &= \sqrt{\frac{160}{5}} = \sqrt{32}
 \end{aligned}$$

Η τιμή $\bar{x} = 20$ απορρίπτεται αφού δίνει τιμή τυπικής απόκλισης $s \neq 4$.

Παρατήρηση:

Για $\kappa=10$ δεν επαληθεύεται η τυπική απόκλιση $s=4$ των παρατηρήσεων.

Με δεδομένο ότι $\bar{x} = 20$, μπορούμε να προχωρήσουμε στην επίλυση του ερωτήματος Γ3.

$$\text{Γ.3. } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i}{5} \Leftrightarrow 20 = \frac{22+18+20+\kappa+14+16}{5} \Leftrightarrow 90 + \kappa = 100 \Leftrightarrow \kappa = 10$$

Διατάσσουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά και έχουμε:

$$14 < 16 < 18 < 22 < 30$$

Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττός αριθμός έτσι η διάμεσος ισούται με την μεσαία παρατήρηση δηλαδή $\delta = 18$.

Γ.4. Εάν οι θερμοκρασίες αυξηθούν κατά 10% οι νέες παρατηρήσεις θα είναι της μορφής

$$y_i = x_i + 10\%x_i = x_i + 0,1x_i = 1,1x_i, i = 1, 2, \dots, 5$$

Επομένως έχουμε

$$\bar{y} = 1,1\bar{x} = 1,1 \cdot 20 = 22$$

$$s_y = |1,1|s = 1,1 \cdot 4 = 4,4$$

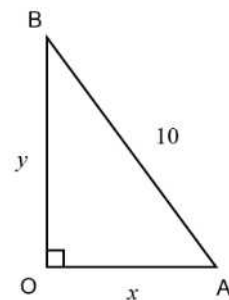
$$\text{Άρα } CV_y = \frac{s_y}{|\bar{y}|} = \frac{4,4}{22} = 0,2 \text{ ή } CV_y = 20\%$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1. Εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ.

$$AB^2 = OB^2 + OA^2 \Leftrightarrow 10^2 = y^2 + x^2 \Leftrightarrow y^2 = 100 - x^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{100 - x^2}$$

$$\text{Πρέπει } \left. \begin{array}{l} x > 0 \text{ (μήκος πλευράς τριγώνου)} \\ y > 0 \Leftrightarrow 100 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 100 \Leftrightarrow |x| < 10 \Leftrightarrow -10 < x < 10 \end{array} \right\} \Rightarrow x \in (0, 10)$$



$$\text{Άρα } f(x) = \sqrt{100 - x^2} \quad x \in (0, 10)$$

Δ.2. Ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης είναι:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{100 - x^2}} (100 - x^2)' = \frac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{100 - x^2}}, \quad x \in (0, 10)$$

$$\text{Άρα } f'(8) = \frac{-8}{\sqrt{100 - 8^2}} = \frac{-8}{\sqrt{100 - 64}} = \frac{-8}{\sqrt{36}} = \frac{-8}{6} = -\frac{4}{3}$$

Δ.3.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x) - 8}{x - 6} &= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{100 - x^2} - 8}{x - 6} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(\sqrt{100 - x^2} - 8)(\sqrt{100 - x^2} + 8)}{(x - 6)(\sqrt{100 - x^2} + 8)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(\sqrt{100 - x^2})^2 - 8^2}{(x - 6)(\sqrt{100 - x^2} + 8)} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{100 - x^2 - 64}{(x - 6)(\sqrt{100 - x^2} + 8)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{36 - x^2}{(x - 6)(\sqrt{100 - x^2} + 8)} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(6 - x)(6 + x)}{(x - 6)(\sqrt{100 - x^2} + 8)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{-(x - 6)(6 + x)}{(x - 6)(\sqrt{100 - x^2} + 8)} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{-(6 + x)}{\sqrt{100 - x^2} + 8} = \frac{-(6 + 6)}{\sqrt{100 - 6^2} + 8} = \\ &= \frac{-12}{\sqrt{64} + 8} = \frac{-12}{8 + 8} = \frac{-12}{16} = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

β' τρόπος

$$\text{Παρατηρούμε ότι } f(6) = \sqrt{100 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x) - 8}{x - 6} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x) - f(6)}{x - 6} = f'(6) = \frac{-6}{\sqrt{100 - 6^2}} = \frac{-6}{\sqrt{100 - 36}} = \frac{-6}{\sqrt{64}} = \frac{-6}{8} = -\frac{3}{4}$$

Δ.4. Έχουμε $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{100-x^2}}$

Ισχύει ότι $\sqrt{100-x^2} > 0$, $x \in (0,10)$ και $-x < 0$, $x \in (0,10)$

Άρα $f'(x) < 0$ για $x \in (0,10)$ άρα f 2 στο $(0,10)$

Για τις τιμές $x_1 = 2, 3$, $x_2 = 3, 5$, $x_3 = 2, 8$ ισχύει $0 < x_1 < x_3 < x_2 < 10$

Έχουμε λοιπόν $x_1 < x_3 < x_2 \stackrel{f^2}{\Leftrightarrow} f(x_1) > f(x_3) > f(x_2)$.

ΧΙΩΤΗΣ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ