

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΕΤΑΡΤΗ 16 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό σελίδα 135

A2. Σχολικό σελίδα 51

A3. Σχολικό σελίδα 23

A4.

α) Σ

β) Λ

γ) Σ

δ) Σ

ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

ΘΕΜΑ Β

B1

Θέτουμε όπου $x+1$ το y .

Οπότε $f(y) = ye^{-(y-1)} = ye^{1-y}$

Άρα $f(x) = xe^{1-x}, x \in \mathbb{R}$.

B2.

$$f'(x) = e^{1-x} + xe^{1-x}(1-x)' = e^{1-x} - xe^{1-x} = e^{1-x}(1-x).$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1-x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1$ είναι συνεχής στο 1, άρα f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$.

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1-x < 0 \Leftrightarrow x > 1$ είναι συνεχής στο 1, άρα f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$.

Στο 1 παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $f(1) = 1$

B3.

$$f''(x) = [(1-x)e^{1-x}]' = (1-x)'e^{1-x} + (1-x)(e^{1-x})' = -e^{1-x} - (1-x)e^{1-x} = e^{1-x}(x-2).$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{1-x}(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 2$. Άρα η f είναι κυρτή στο $[2, +\infty)$.

$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 2$. Άρα η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 2]$.

Οπότε παρουσιάζει καμπή στο σημείο $(2, f(2)) \equiv \left(2, \frac{2}{e}\right)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 0x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{1-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x-1}} \stackrel{\infty/\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x)'}{(e^{x-1})'} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{x-1}} = 0.$$

Η $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x} = +\infty.$$

Άρα στο $-\infty$ δεν έχει ασύμπτωτες.

B4.

(i)

$A_1 = (-\infty, 1]$. Στο διάστημα αυτό η f είναι γνησίως αύξουσα άρα $f(A_1) = (\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(1)] = (-\infty, 1]$.

$A_2 = (1, +\infty)$. Στο διάστημα αυτό η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα $f(A_2) = (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)) = (0, 1)$.

Άρα $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = (-\infty, 1]$.

(ii)

$$f(x) = \lambda$$

$$\text{Αν } \lambda \leq 0$$

$\lambda \in f(A_1)$ άρα έχει ακριβώς μία λύση στο A_1 . (λόγω μονοτονίας στο A_1)

$$\text{Αν } 0 < \lambda < 1$$

$\lambda \in f(A_1)$ άρα έχει ακριβώς μία λύση στο A_1 . (λόγω μονοτονίας στο A_1)

$\lambda \in f(A_2)$ άρα έχει ακριβώς μία λύση στο A_2 . (λόγω μονοτονίας στο A_2)

Άρα έχει 2 ακριβώς λύσεις.

Για $\lambda=1$ ακριβώς μία λύση

Για $\lambda>1$ καμία λύση.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1) Για $x < 0$: η f συνεχής ως πολυωνυμική

Για $0 < x \leq \frac{3\pi}{2}$: η f συνεχής ως τριγωνομετρική

Στο $x=0$: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (ax^3 - 3x^2 - x + 1) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x = 1$$

Προκύπτει ότι $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ οπότε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ και $f(0)=1$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$. Οπότε η f είναι συνεχής στο $x_0=0$

Επομένως, η f συνεχής στο $(-\infty, \frac{3\pi}{2}]$

Έχουμε ότι: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{a^3-3x^2-x+1-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(a^2-3x-1)}{x} = -1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - 1}{x} = 0$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x}$ η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$

Γ2)

i) Η f συνεχής στο $(0, \frac{3\pi}{2}]$ ως τριγωνομετρική και f συνεχής στο $x_0=0$. Άρα η f συνεχής $[0, \frac{3\pi}{2}]$

- Η f παραγωγίσιμη στο $(0, \frac{3\pi}{2})$, με: $f'(x) = -\eta\mu x$

- $f(0)=1$

$f(\frac{3\pi}{2})=0$ Προκύπτει ότι $f(0) \neq f(\frac{3\pi}{2})$

Άρα, η f δεν ικανοποιεί την τρίτη προϋπόθεση του θεωρήματος Rolle

ii) Θεωρώ $f(x) = \sin x$, $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \subseteq [0, \frac{3\pi}{2}]$

Η f συνεχής $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

Η f παραγωγίσιμη στο $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, με: $f'(x) = -\eta\mu x$

$$f(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{3\pi}{2}) = 0$$

Άρα, από θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \subseteq (0, \frac{3\pi}{2})$

τέτοιο ώστε: $f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow -\eta\mu\xi = 0 \Leftrightarrow \eta\mu\xi = 0 \Leftrightarrow \xi = \pi$

Γ3) Ισχύει ότι $f'(x) = 3ax^2 - 6x - 1$ για $x < 0$

Έστω ότι υπάρχει $(x_0, f(x_0)) \in Cf$ με $x_0 < 0$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$ τότε $3ax_0^2 - 6x_0 - 1 = 0$ (1)

$$\Delta = (-6)^2 - 4(3a)(-1) = 36 + 12a = 12(3+a)$$

Από υπόθεση $a < -3 \Rightarrow a+3 < 0$ άρα $\Delta < 0$ άρα η (1) είναι αδύνατη δηλαδή $f'(x) \neq 0$

Οπότε δεν υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης με αρνητική τετμημένη τέτοια ώστε να επιδέχεται εφαπτομένη παράλληλη στον x' .

Γ4

- Για $x < 0$: $f'(x) < 0$
- Για $0 < x < \frac{3\pi}{2}$: $f'(x) = -\eta\mu x$
 $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow x = \pi$
 $f'(x) > 0 \Leftrightarrow -\eta\mu x > 0 \Leftrightarrow \eta\mu x < 0 \Leftrightarrow \pi < x < \frac{3\pi}{2}$
 $f'(x) < 0 \Leftrightarrow -\eta\mu x < 0 \Leftrightarrow \eta\mu x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \pi$

x	$-\infty$	0	π	$\frac{3\pi}{2}$
$f'(x)$	-	-	0	+
f				

ΧΙΩΤΗΣ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Η $f'(x) < 0$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \pi)$ και f συνεχής στο 0 και π άρα, η $f \downarrow (-\infty, \pi]$
 Η $f'(x) > 0$, $x \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$ και f συνεχής στο π και $\frac{3\pi}{2}$ άρα, η $f \uparrow [\pi, \frac{3\pi}{2}]$

Επομένως η f στο $x = \pi$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(\pi) = -1$.

Άρα, $f(x) \geq f(\pi)$, για κάθε $x \in (-\infty, \frac{3\pi}{2}]$

Δηλαδή $f(x) \geq -1$, για κάθε $x \in (-\infty, \frac{3\pi}{2}]$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $\ln x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x \ln x = 1 \Leftrightarrow x \ln x - 1 = 0$.

Θέτω $\varphi(x) = x \ln x - 1$

Η $\varphi(x)$ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

$\varphi(1) = -1 < 0$

$\varphi(e) = e - 1 > 0$

Από Θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, e)$ τέτοιο ώστε

$\varphi(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 \ln x_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_0 \ln x_0 = 1$ (*)

$\varphi'(x) = \ln x + x \frac{1}{x} = \ln x + 1$

Για $x \in (1, e)$ $\ln x + 1 > 0$, άρα $\varphi'(x) > 0$

Συνεπώς η $\varphi(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, e)$

Οπότε το x_0 μοναδική ρίζα στο $(1, e)$.

Δ2. $f(x) = (\ln x_0) \cdot (x + 1) - \ln x - 1$

$$f'(x) = \ln x_0 - \frac{1}{x}$$

$$\Theta\acute{\epsilon}\tau\omega f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 - \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \ln x_0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\ln x_0} = x_0 (*)$$

x	0	x_0	$+\infty$
$f'(x)$		0	+
f		Ελαχ.	↘

Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 το $f(x_0) = \ln x_0(x_0 + 1) - \ln x_0 - 1$

$$f(x_0) = x_0 \ln x_0 + \ln x_0 - \ln x_0 - 1$$

$$f(x_0) = x_0 \ln x_0 - 1 = 0 \text{ από ερώτημα Δ1.}$$

Δ3. $g(x) = h(x) \Leftrightarrow x e^{-x} = \frac{x_0^{x+1}}{e^{x+1}} \Leftrightarrow x e^{-x} e^{x+1} = x_0^{x+1} \Leftrightarrow x \cdot e = x_0^{x+1} \Leftrightarrow$
 $\ln(ex) = \ln x_0^{x+1}$

$$\Leftrightarrow \ln e + \ln x = (x+1) \ln x_0 \Leftrightarrow 1 + \ln x = x \ln x_0 + \ln x_0 \quad (1)$$

Για $x = x_0 \Rightarrow 1 + \ln x_0 = x_0 \ln x_0 + \ln x_0$ ισχύει λόγω του Δ1.

$$g'(x) = e^{-x} - x e^{-x} \Rightarrow g'(x_0) = e^{-x_0} - x_0 e^{-x_0} \Leftrightarrow g'(x_0) = e^{-x_0} (1 - x_0)$$

$$h(x) = e^{(x+1) \ln \left(\frac{x_0}{e} \right)}$$

$$h'(x) = e^{(x+1) \ln \left(\frac{x_0}{e} \right)} \cdot \ln \frac{x_0}{e} = \left(\frac{x_0}{e} \right)^{x_0+1} \ln \left(\frac{x_0}{e} \right) = \left(\frac{x_0}{e} \right)^{x_0+1} (\ln x_0 - 1) \quad (2)$$

$$x_0 \ln x_0 = 1 \Leftrightarrow \ln x_0 = \frac{1}{x_0} \quad (3)$$

$$x_0 \ln x_0 = 1 \Leftrightarrow \ln x_0 = \frac{1}{x_0} \Leftrightarrow x_0 = e^{\frac{1}{x_0}} \Leftrightarrow \frac{x_0}{e} = e^{\frac{1}{x_0}-1} \quad (4)$$

$$\xrightarrow{(2),(3),(4)} h'(x_0) = \left(e^{\frac{1}{x_0}-1} \right)^{x_0+1} \left(\frac{1}{x_0} - 1 \right) \Leftrightarrow h'(x_0) = e^{\frac{1}{x_0}} e^{-x_0} \frac{1-x_0}{x_0} \Leftrightarrow h'(x_0) = x_0 e^{-x_0} \frac{1-x_0}{x_0} \Leftrightarrow h'(x_0) = g'(x_0).$$

Δ4. $f(x) > \varphi(x)$ για κάθε $x > 0$ $A(x, f(x)) \ B(x, \varphi(x))$

Έστω συνάρτηση $K(x) = f(x) - \varphi(x)$ η απόσταση γίνεται ελάχιστη στο x_0 .

Άρα ισχύει $K(x) \geq K(x_0)$ για κάθε $x > 0$.

Επομένως $\varphi(x) = f(x) - K(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - K(x) - f(x_0) + K(x_0)}{x - x_0} =$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{K(x) - K(x_0)}{x - x_0} \right) = l_1$$

$$\text{Ισχύει } \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = 0$$

Και ισχύει $K(x) > K(x_0)$ κοντά στο x_0 , άρα για $x < x_0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{K(x) - K(x_0)}{x - x_0} = +\infty$$

$$\text{Οπότε } l_1 = +\infty$$

$$\text{Ομοίως για } x > x_0 \text{ το } \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \dots = -\infty \text{ δηλαδή } l_2 = -\infty$$

Άρα $l_1 \neq l_2$, συνεπώς η $\varphi(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , οπότε το $x = x_0$ είναι κρίσιμο σημείο της φ .

Β Λύση

Έστω $K(x) = f(x) - \varphi(x)$.

$$d(A, B) = \sqrt{(x - x)^2 + (f(x) - \varphi(x))^2} = |f(x) - \varphi(x)| \text{ με } f(x) > \varphi(x) \text{ για } x > 0$$

$$\text{Άρα } d(A, B) = f(x) - \varphi(x), x > 0.$$

- Αν η φ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε $K(x)$ παραγωγίσιμη στο x_0 με $K'(x_0) = f'(x_0) - \varphi'(x_0)$ όπου x_0 ελάχιστο, άρα $K'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = \varphi'(x_0) \stackrel{43}{\Rightarrow} \varphi'(x_0) = 0$, επομένως κρίσιμο σημείο.
- Αν η φ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο.