

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΤΑΞΗ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
Τετάρτη 17 Ιουνίου 2020
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΟΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)

(Ενδεικτικές Απαντήσεις)

ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελίδα 76 (Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών)

A2. Η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (a, β) και επιπλέον ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \in \mathbb{R}$$

A3. (α) Ψ

(β) Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = x^3$ αν και είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} , εντούτοις έχει παράγωγο $f'(x) = 3x^2$ η οποία δεν είναι θετική σε όλο το \mathbb{R} αφού $f'(0) = 0$.

A4.

- α) Λάθος
- β) Σωστό
- γ) Σωστό
- δ) Σωστό
- ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

$$\mathbf{B1.} \quad A_{f \circ g} = \{x \in A_g \text{ και } g(x) \in A_f\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ και } e^x > 1\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ και } x > 0\}$$

$$\text{Επομένως } A_{f \circ g} = (0, +\infty) \text{ και } (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$$

$$\mathbf{B2.} \quad \text{Ας ονομάζουμε για λόγους απλότητας } h(x) = (f \circ g)(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}, x > 0$$

Για κάθε $x > 0$ η h παραγωγίσιμη με $h'(x) = \frac{-3e^x}{(e^x - 1)^2} < 0$ για κάθε $x > 0$ άρα η

h γνησίως φθίνουσα στο $A_h = (0, +\infty)$ οπότε 1-1 επομένως αντιστρέφεται .

Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της το οποίο θα είναι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης .

Η h συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_h = (0, +\infty)$ με σύνολο τιμών

$$h(A) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x), \lim_{x \rightarrow 0} h(x) \right) = (1, +\infty)$$

Άρα το πεδίο ορισμού της h^{-1} είναι το $A_{h^{-1}} = (1, +\infty)$

$$h(x) = y \Leftrightarrow \frac{e^x + 2}{e^x - 1} = y \Leftrightarrow e^x + 2 = ye^x - y \Leftrightarrow ye^x - e^x = y + 2 \Leftrightarrow e^x = \frac{y+2}{y-1} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right), y > 1$$

$$\text{Επομένως } h^{-1}(x) = (f \circ g)^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right), x > 1$$

$\mathbf{B3.}$ Για κάθε $x > 1$ η $\varphi(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$ ισοδύναμα γράφεται

$\varphi(x) = \ln(x+2) - \ln(x-1)$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $A_\varphi = (1, +\infty)$ με

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-1} = \frac{-3}{(x+2)(x-1)} < 0 \text{ για κάθε } x > 1 \text{ άρα η } \varphi \text{ γνησίως}$$

φθίνουσα στο $A_\varphi = (1, +\infty)$

$$\text{B4. } \lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right), \text{ θέτουμε } u = \frac{x+2}{x-1}, x > 1 \text{ άρα } u_0 = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+2}{x-1} = +\infty$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right), \text{ θέτουμε } u = \frac{x+2}{x-1}, x > 1 \text{ άρα } u_0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x-1} = 1$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = \lim_{u \rightarrow 1^+} \ln u = 0$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Εφόσον η f συνεχής στο $A_f = \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right)$ θα είναι συνεχής στο $x=0$ και θα

$$\text{ισχύει } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

Δηλαδή $1 - \ln \lambda = \lambda \Leftrightarrow \ln \lambda + \lambda - 1 = 0, \lambda > 0$,

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \ln x - x + 1, x > 0$ η οποία είναι παραγωγίσιμη

στο $A_g = (0, +\infty)$ με $g'(x) = \frac{1}{x} - 1 > 0$ για κάθε $x > 0$ άρα η g είναι γνησίως

αύξουσα στο $A_g = (0, +\infty)$ και επειδή η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει προφανή λύση την $x=1$, λόγω μονοτονίας θα είναι μοναδική.

$$\text{Άρα } \ln \lambda + \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow g(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

$$\text{Γ2. Άρα η συνάρτηση είναι : } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x \leq 0 \\ \eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x, & 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Θα βρούμε την παράγωγο της f στο $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{1-x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x(1-x)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\eta \mu x}{x} + \frac{\sigma \upsilon \nu x - 1}{x} \right) = 1 + 0 = 1$$

Άρα $f'(0)=1$,επομένως ορίζεται η εφαπτομένη της f στο $x=0$ και επειδή $f'(0)=1$ η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ είναι ίση με $\frac{\pi}{4}$

Γ3. Κρίσιμα σημεία της f πλέον είναι μόνο (αν υπάρχουν) τα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της στα οποία η παράγωγος κάνει μηδέν

$$\text{Για } x < 0 \quad f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} > 0$$

$$\text{Για } x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right) \quad f'(x) = \sin x - \eta\mu x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = \sin x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \quad \text{ή} \quad x = \frac{5\pi}{4}$$

Άρα τα μοναδικά κρίσιμα σημεία της είναι $x = \frac{\pi}{4}$ και $x = \frac{5\pi}{4}$

Γ4. Η εξίσωση εφαπτομένης της f στο σημείο M είναι $y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$

Το σημείο τομής με τον άξονα $x'x$ θα βρεθεί αντικαθιστώντας στη εξίσωση της εφαπτομένης $y=0$ άρα : $-\frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{(1-\alpha)^2}(x-\alpha) \Leftrightarrow x-\alpha = \alpha-1 \Leftrightarrow x = 2\alpha-1$

Άρα $B(2\alpha-1, 0)$

$$x(t) = 2\alpha(t) - 1 \quad \text{οπότε} \quad x'(t) = 2\alpha'(t) = -\frac{2}{3}\alpha(t)$$

$$\text{Για } t = t_0 \quad \text{έχουμε} \quad x'(t_0) = -\frac{2}{3}\alpha(t_0) = \frac{2}{3}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f'(x) = e^x + 2x - e$

Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μία μόνο ρίζα και αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν αυτής .

Πράγματι : $f''(x) = e^x + 2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα η f' γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

Επίσης η f' συνεχής στο $[0,1]$ και $f'(0) = 1 - e < 0$ ενώ $f'(1) = 2 > 0$ άρα από θεώρημα Bolzano η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$

δηλαδή υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} + 2x_0 - e = 0$ **(1)**

το x_0 μοναδικό διότι η f' γνησίως αύξουσα .

Το πρόσημο της f' είναι :

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(x_0) \Leftrightarrow x > x_0$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(x_0) \Leftrightarrow x < x_0$$

Επομένως η f στο διάστημα $A_1 = (-\infty, x_0]$ είναι γνησίως φθίνουσα ,ενώ στο διάστημα $A_2 = [x_0, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα .Στη θέση x_0 παρουσιάζει ελάχιστο το $f(x_0) = e^{x_0} + x_0^2 - ex_0 + 2$.

$x \geq x_0 \Leftrightarrow f(x) \geq f(x_0)$ και $x \leq x_0 \Leftrightarrow f(x) \geq f(x_0)$ άρα έχει ολικό ελάχιστο .

$$f(x_0) = e^{x_0} + x_0^2 - ex_0 - 1 \text{ και από την (1) } e^{x_0} + 2x_0 - e = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} = e - 2x_0$$

$$\text{Αντικαθιστώντας προκύπτει } f(x_0) = e - 2x_0 + x_0^2 - ex_0 - 1 = x_0^2 - (e+2)x_0 + e - 1$$

Δ2.

Α-τρόπος

Για το $\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \right]$ έχουμε :

- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x) - f(x_0)} = +\infty$ διότι $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$ και $f(x) > f(x_0)$ για κάθε $x \neq x_0$
- $\left[\frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \right] \geq \frac{1}{f(x) - f(x_0)} - 1$ και επειδή $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{1}{f(x) - f(x_0)} - 1 \right) = +\infty$ άρα $\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \right] = +\infty$

Β-τρόπος

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x) - f(x_0)} \left[1 + (f(x) - f(x_0)) \eta\mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \right]$$

Ισχύει : $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x) - f(x_0)} = +\infty$ διότι $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$ και για $x \rightarrow x_0$ $f(x) > f(x_0)$

$$\text{Επίσης } \left| (f(x) - f(x_0)) \eta\mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \right| = |f(x) - f(x_0)| \cdot \left| \eta\mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \right| \leq |f(x) - f(x_0)|$$

Άρα $-(f(x) - f(x_0)) \leq (f(x) - f(x_0)) \eta\mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \leq f(x) - f(x_0)$ και από κριτήριο

παρεμβολής $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) \eta\mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x) - f(x_0)} \left[1 + (f(x) - f(x_0)) \eta\mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \right] = (+\infty)(1 + 0) = +\infty$$

Δ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) + x - x_0$ η οποία είναι συνεχής στο $[x_0, 1]$ και $g(1) = f(1) + 1 - x_0 = 1 - x_0 > 0$ ενώ $g(x_0) = f(x_0) < 0$ διότι $x_0 < 1$ και η f γνησίως αύξουσα άρα $f(x_0) < f(1) \Leftrightarrow f(x_0) < 0$, άρα από θεώρημα Bolzano η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα ρ στο $(x_0, 1)$ δηλαδή $g(\rho) = 0 \Leftrightarrow f(\rho) = x_0 - \rho$, η ρίζα είναι μοναδική διότι $g'(x) = f'(x) + 1 > 0$ διότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x > x_0$ (ερώτημα Δ1).

Δ4. Η προς απόδειξη σχέση ισοδύναμα γίνεται :

$$f(x_0) > f(\rho)(f'(k) + 1) \Leftrightarrow f(x_0) > (x_0 - \rho)(f'(k) + 1) \Leftrightarrow f'(k) + 1 > \frac{f(x_0)}{x_0 - \rho}, x_0 < \rho$$

$$\text{Άρα } f'(k) > \frac{f(x_0)}{x_0 - \rho} - 1 \Leftrightarrow f'(k) > \frac{f(x_0) - x_0 + \rho}{x_0 - \rho} \Leftrightarrow f'(k) > \frac{f(x_0) - f(\rho)}{x_0 - \rho} \text{ (A)}$$

Αρκεί να αποδείξουμε την (A)

Εφαρμόζουμε Θεώρημα Μέσης Τιμής στο διάστημα $[x_0, \rho]$ άρα υπάρχει

$$\xi \in (x_0, \rho) \text{ τέτοιο ώστε } f'(\xi) = \frac{f(\rho) - f(x_0)}{\rho - x_0}$$

$$\text{Άρα : } \xi < k \Leftrightarrow f'(\xi) < f'(k) \Leftrightarrow \frac{f(\rho) - f(x_0)}{\rho - x_0} < f'(k), \text{ εφόσον } f' \text{ γνησίως αύξουσα}$$