ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 14 ΙΟΥΝΙΟΥ 2012
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 262

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 141

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 246

Α4. α. Σωστό , **β.** Σωστό, **γ.** Λάθος, **δ.** Σωστό, **ε.** Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

Β1. $w \in I \Leftrightarrow \bar{w} = -w \Leftrightarrow \overline{\frac{z-1}{z+1}} = -\frac{z-1}{z+1} \Leftrightarrow \frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1} = \frac{1-z}{z+1} \Leftrightarrow$

$(\bar{z}-1)(z+1) = (1-z)(\bar{z}+1) \Leftrightarrow z\bar{z} + \cancel{\bar{z}z} - 1 = \cancel{\bar{z}} - 1 - z\bar{z} \cancel{+z} \Leftrightarrow$

$2z\bar{z} = 2 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$

Β2. $|z|^2 = 1 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$ (1)

$\left(z - \frac{1}{z}\right)^4 \overset{(1)}{=} (z - \bar{z})^4 = \left[2\text{Im}(z)i\right]^4 = 16\,\text{Im}^4(z)i^4 = 16\,\text{Im}^4(z) \in IR$

Β3. Ισχύουν : $\bar{z}_1 = \frac{1}{z_1}$ (2) και $\bar{z}_2 = \frac{1}{z_2}$ (3)

$\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right)(z_1 + z_2) \overset{(2)}{=}_{(3)} (\bar{z}_1 + \bar{z}_2)(z_1 + z_2) = |z_1 + z_2|^2 \le \left(|z_1| + |z_2|\right)^2 = 4$

Β4. $w \in I$, άρα $w = \beta i$, με $\beta \in IR$

Έστω $u = x + yi$, με $x, y \in IR$

$u - ui = \frac{i}{w} - w \Leftrightarrow x + yi - (x + yi)i = \frac{i}{\beta i} - \beta i \Leftrightarrow$

$x + yi - xi + y = \frac{1}{\beta} - \beta i \Leftrightarrow (x + y) + (y - x)i = \frac{1}{\beta} - \beta i \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x + y = \frac{1}{\beta} \\ y - x = -\beta \end{cases} \overset{(\cdot)}{\Rightarrow} y^2 - x^2 = -1 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 1$

άρα οι εικόνες του u ανήκουν στην υπερβολή $x^2 - y^2 = 1$

ΧΙΩΤΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $x \cdot f(x) + 1 = e^x \Leftrightarrow x \cdot f(x) = e^x - 1$

- Για $x \neq 0$ είναι $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$
- $f(0) \overset{\text{f συνεχής}}{=} \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} \underset{\text{DL'H}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{1} = 1$

Άρα $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

Γ2. • Για $x \neq 0$ είναι $f'(x) = \left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)' = \dfrac{xe^x - e^x + 1}{x^2}$

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2} \underset{\text{DL'H}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{2x} \underset{\text{DL'H}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{2} = \dfrac{1}{2}$

Άρα $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{xe^x - e^x + 1}{x^2}, & \text{αν } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2}, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

ΧΙΩΤΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Θεωρούμε τη συνάρτηση g, με $g(x) = xe^x - e^x + 1$, με $g'(x) = xe^x$, $x \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$\searrow$		g_{min}	$\nearrow$	

$g_{min} = g(0) = 0$, άρα $g(x) > 0$, για κάθε $x \neq 0$.

Επομένως $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα f γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα f "1 – 1", άρα f αντιστρέψιμη.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{e^x - 1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x - 1}{x} \underset{\text{DL'H}}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{1} = +\infty \end{array}\right\} \overset{f\uparrow}{\Rightarrow}$$

$D_{f^{-1}} = f(\mathbb{R}) = \left(\lim\limits_{x\to -\infty} f(x), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right) = (0, +\infty)$

Γ3. $(\varepsilon): y - f(0) = f'(0)\cdot(x-0) \Leftrightarrow (\varepsilon): y - 1 = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow (\varepsilon): y = \frac{1}{2}x + 1$

1ος τρόπος

Η f είναι κυρτή στο IR, άρα η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη (ε) με εξαίρεση το σημείο επαφής Α (0 , 1), άρα

$f(x) \geq \frac{1}{2}x + 1 \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} 2f(x) \geq x + 2$ και το "=" ισχύει μόνο για $x = 0$.

Επομένως η εξίσωση $2f(x) = x + 2$ έχει ακριβώς μια λύση την $x = 0$.

2ος τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση h, με $h(x) = 2f(x) - x - 2$, $x \in IR$

Είναι $h'(x) = 2f'(x) - 1$, $x \in IR$

$x_1 < x_2 \overset{\substack{f \text{ κυρτή} \\ f' \uparrow}}{\Leftrightarrow} f'(x_1) < f'(x_2) \Leftrightarrow 2f'(x_1) < 2f'(x_2) \Leftrightarrow$

$2f'(x_1) - 1 < 2f'(x_2) - 1 \Leftrightarrow h'(x_1) < h'(x_2)$

άρα η h΄ είναι γνησίως αύξουσα στο IR.

Είναι $h'(0) = 2f'(0) - 1 = 2\frac{1}{2} - 1 = 0$,

- $x < 0 \overset{h' \uparrow}{\Rightarrow} h'(x) < 0$, άρα h γν. φθίνουσα στο $(-\infty , 0)$
- $x > 0 \overset{h' \uparrow}{\Rightarrow} h'(x) > 0$, άρα h γν. αύξουσα στο $(0 , +\infty)$
- $h(0) = 2f(0) - 2 = 0$
- $x < 0 \overset{h \downarrow}{\Rightarrow} h(x) > 0$
- $x > 0 \overset{h \uparrow}{\Rightarrow} h(x) > 0$

} άρα η $h(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα το 0.

Επομένως η εξίσωση $2f(x) = x + 2$ έχει ακριβώς μια λύση την $x = 0$.

Γ4. • $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\cdot \ell n x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ell n x}{\frac{1}{x}} \overset{\text{DL'H}}{=} \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+}(-x) = 0$

• $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\ell n\left(f(x)\right)\right] \overset{\substack{f(x)=u \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1}}{=} \lim\limits_{u\to 1}\ell n u = 0$

άρα $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[x\cdot \ell n x\cdot \ell n\left(f(x)\right)\right] = \lim\limits_{x\to 0^+}(x\cdot \ell n x)\cdot \lim\limits_{x\to 0^+}\left[\ell n\left(f(x)\right)\right] = 0\cdot 0 = 0$

ΧΙΩΤΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $2f(x) + \left(x + \frac{1}{x}\right)e^{f(x)} = \int_1^x e^{f(t)} \cdot f(t)\left(t + \frac{1}{t}\right) dt + 2, \ x > 0$ **(1)**

Παραγωγίζουμε κατά μέλη και έχουμε :

$$2f'(x) + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)e^{f(x)} + e^{f(x)} \cdot f(x)\left(x + \frac{1}{x}\right) = e^{f(x)} \cdot f(x)\left(x + \frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow$$

$$2f'(x) = -\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)e^{f(x)} \Leftrightarrow -2e^{-f(x)}f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow$$

$$\left[2e^{-f(x)}\right]' = \left(x + \frac{1}{x}\right)'$$

από συνέπειες Θ.Μ.Τ. προκύπτει ότι $2e^{-f(x)} = x + \frac{1}{x} + c$ **(2)**

Από την (1) για $x = 1$ έχουμε :

$2f(1) + 2e^{f(1)} = 2 \Leftrightarrow f(1) + e^{f(1)} = 1$

Θεωρούμε τη συνάρτηση S, με $S(x) = x + e^x$, $x \in \mathbb{R}$

Είναι $S'(x) = 1 + ex > 0$,

άρα η S είναι γνησίως αύξουσα

άρα η S είναι "1 - 1".

$$f(1) + e^{f(1)} = 1 \Leftrightarrow S(f(1)) = S(0) \overset{S \text{ "1 - 1"}}{\Leftrightarrow} f(1) = 0$$

$$(2) \overset{x = 1}{\Rightarrow} 2e^{-f(1)} = 2 + c \overset{f(1) = 0}{\Leftrightarrow} 2 = 2 + c \Leftrightarrow c = 0$$

$$(2) \overset{c = 0}{\Rightarrow} 2e^{-f(x)} = x + \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{2}{e^{f(x)}} = \frac{x^2 + 1}{x} \Leftrightarrow \frac{e^{f(x)}}{2} = \frac{x}{x^2 + 1} \Leftrightarrow$$

$$e^{f(x)} = \frac{2x}{x^2 + 1} \Leftrightarrow \mathbf{f(x) = \ell n\left(\frac{2x}{x^2 + 1}\right), \ x > 0}$$

ΧΙΩΤΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Δ2. $F'(x) = \left(\int_1^x f(t)\,dt\right)' = f(x),\ x > 0$

$$F''(x) = f'(x) = \left[\ell n\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)\right]' = \frac{1}{\frac{2x}{x^2+1}} \cdot \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)'$$

$$= \frac{x^2+1}{2x} \cdot \frac{2\left(x^2+1\right) - 2x \cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{2\left(1-x^2\right)}{2x \cdot \left(x^2+1\right)}$$

$$= \frac{(1-x)(1+x)}{x \cdot \left(x^2+1\right)},\ x > 0$$

Το πρόσημο της f'' άρα και την κυρτότητα της f την καθορίζει ο παράγοντας $(1 - x)$

x	0		1		$+\infty$
$F''(x)$		+	0	-	
F		↗	σ.κ.	↘	

$F(1) = \int_1^1 f(t)\,dt = 0$, άρα σημείο καμπής της C_F το $\Sigma(1, 0)$

ΧΙΩΤΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Η F είναι παραγωγίσιμη στο $[1, \beta]$

Από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (1, \beta)$, τέτοιο ώστε

$$F'(\xi) = \frac{F(\beta) - F(1)}{\beta - 1} = \frac{F(\beta)}{\beta - 1} = \lambda_\varepsilon$$

άρα υπάρχει $\xi \in (1, \beta)$, τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_F στο σημείο της $M(\xi, F(\xi))$ είναι παράλληλη στην (ε).

Είναι $F''(x) < 0$ στο $[1, \beta]$,

άρα η F' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, \beta]$,

άρα το ξ είναι μοναδικό.

Δ3. Θεωρούμε συνάρτηση φ, με

$$\varphi(x) = (x-3)[F(\beta) + (1-\beta)f(\beta)] + (\beta-1)(x-1)(x+1)^3, x \in [1, 3]$$

- Η φ συνεχής στο $[1, 3]$ ως πράξεις συνεχών
- $\varphi(1) = -2 \cdot [F(\beta) + (1-\beta) \cdot f(\beta)] < 0$, διότι

$$1 < \xi < \beta \overset{F' \downarrow \text{ στο } [1, +\infty)}{\Rightarrow} F'(\xi) > F'(\beta) \Leftrightarrow \frac{F(\beta)}{\beta - 1} > f(\beta) \Leftrightarrow$$

$$F(\beta) > (\beta - 1) \cdot f(\beta) \Leftrightarrow F(\beta) + (1-\beta) \cdot f(\beta) > 0$$

- $\varphi(3) = 128 \cdot (\beta - 1) > 0$

Από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (1, 3)$, τέτοιο ώστε $\varphi(x_1) = 0 \Leftrightarrow$

$$(x_1 - 3)[F(\beta) + (1-\beta)f(\beta)] + (\beta-1)(x_1-1)(x_1+1)^3 = 0 \overset{x_1-3 \neq 0}{\underset{x_1-1 \neq 0}{\Leftrightarrow}}$$

$$\frac{(x_1-3)[F(\beta) + (1-\beta)f(\beta)]}{(x_1-3)\cdot(x_1-1)} + \frac{(\beta-1)(x_1-1)(x_1+1)^3}{(x_1-3)\cdot(x_1-1)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{F(\beta) + (1-\beta)\cdot f(\beta)}{x_1 - 1} + \frac{(\beta-1)\cdot(x_1+1)^3}{x_1 - 3} = 0$$

άρα η εξίσωση $\dfrac{F(\beta) + (1-\beta)\cdot f(\beta)}{x-1} + \dfrac{(\beta-1)\cdot(x+1)^3}{x-3} = 0$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 3)$.

Δ4. Θα δείξουμε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει :

$$\int_x^{x^2} f\left(\frac{t}{x}\right) dt \leq \int_1^x t \cdot f(t)\, dt \Leftrightarrow$$

$$\int_1^x x \cdot f(u)\, du \leq \int_1^x t \cdot f(t)\, dt \Leftrightarrow$$

$$\int_1^x x \cdot f(t)\, dt \leq \int_1^x t \cdot f(t)\, dt \quad \textbf{(1)}$$

$\dfrac{t}{x} = u \Leftrightarrow t = ux$

$dt = x\, du$

t	x	x^2
u	1	x

ΧΙΩΤΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

1ος τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση h,

με $h(x) = x \cdot \int_1^x f(t)\,dt - \int_1^x t \cdot f(t)\,dt,\ x > 0$

$h'(x) = \left(x \cdot \int_1^x f(t)\,dt - \int_1^x t \cdot f(t)\,dt\right)'$

$= (x)' \cdot \int_1^x f(t)\,dt + x \cdot \left(\int_1^x f(t)\,dt\right)' - \left(\int_1^x t \cdot f(t)\,dt\right)'$

$= \int_1^x f(t)\,dt + x \cdot f(x) - x \cdot f(x) = \int_1^x f(t)\,dt = F(x)$

$f(A) = (-\infty, 0]$, άρα $f(x) \le 0 \Leftrightarrow -f(x) \ge 0$

και το "=" ισχύει μόνο για $x = 1$

- αν $0 < x < 1$, τότε $\int_x^1 -f(t)\,dt > 0 \Leftrightarrow$

  $\int_1^x f(t)\,dt > 0 \Leftrightarrow h'(x) > 0$

- αν $x > 1$, τότε $\int_1^x -f(t)\,dt > 0 \Leftrightarrow$

  $-\int_1^x f(t)\,dt > 0 \Leftrightarrow h'(x) < 0$

ΧΙΩΤΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

x	0	1	+∞
h´(x)	+		-
h	↗		↘

$h_{max} = h(1) = 0$

Επομένως για κάθε $x > 0$ είναι :

$h(x) \le 0 \Leftrightarrow \int_1^x f(t)\,dt - \int_1^x t \cdot f(t)\,dt \le 0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$\int_x^{x^2} f\left(\frac{t}{x}\right) dt \le \int_1^x t \cdot f(t)\,dt$

2ος τρόπος

- αν $0 < x \le t \le 1$, τότε :

$$\left.\begin{array}{l} x - t \le 0 \\ f(t) \le 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x - t)\cdot f(t) \ge 0, \text{ άρα}$$

$$\int_x^1 (x - t)\cdot f(t)\,dt \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_x^1 xf(t)\,dt - \int_x^1 tf(t)\,dt \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_x^1 xf(t)\,dt \ge \int_x^1 tf(t)\,dt \Leftrightarrow$$

$$-\int_1^x xf(t)\,dt \ge -\int_1^x tf(t)\,dt \Leftrightarrow$$

$$\int_1^x xf(t)\,dt \le \int_1^x tf(t)\,dt$$

- αν $1 \le t \le x$, τότε :

$$\left.\begin{array}{l} x - t \ge 0 \\ f(t) \le 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x - t)\cdot f(t) \le 0 \Leftrightarrow -(x - t)\cdot f(t) \ge 0, \text{ άρα}$$

$$\int_1^x -(x - t)\cdot f(t)\,dt \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$-\int_1^x xf(t)\,dt + \int_1^x tf(t)\,dt \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$-\int_1^x xf(t)\,dt \ge -\int_1^x tf(t)\,dt \Leftrightarrow$$

$$\int_1^x xf(t)\,dt \le \int_1^x tf(t)\,dt$$

Επομένως για κάθε $x > 0$ ισχύει :

$$\int_1^x xf(t)\,dt \le \int_1^x tf(t)\,dt \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\int_x^{x^2} f\left(\frac{t}{x}\right)dt \le \int_1^x t\cdot f(t)\,dt$$

ΧΙΩΤΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ