ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β' ΚΥΚΛΟΥ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΤΕΕ 2005

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Ερωτήθηκαν 50 μαθητές ενός σχολείου για τον αριθμό των βιβλίων που διάβασαν στις διακοπές. Τα αποτελέσματα της έρευνας φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Τιμές x_i	**Συχνότητα** v_i	**Αθροιστική Συχνότητα**	$x_i v_i$
0		11	
1		25	
2		42	
3		47	
4		50	
Αθροίσματα			

α) Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στο τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε.

Μονάδες 8

β) Να βρείτε τη μέση τιμή των παρατηρήσεων.

Μονάδες 8

γ) Να βρείτε τη διάμεσο των παρατηρήσεων.

Μονάδες 5

δ) Να βρείτε το εύρος των τιμών.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & x < -1 \\ \kappa x + \mu, & -1 \le x \le 1 \\ x^2 + 2x + 5 + \ln x, & x > 1 \end{cases}$$

όπου κ, μ πραγματικοί αριθμοί.

α) Να βρείτε το $\lim_{x \to -1^-} f(x)$

Μονάδες 4

β) Να βρείτε το $\lim_{x \to -1^+} f(x)$

Μονάδες 4

γ) Να βρείτε το $\lim_{x \to 1^-} f(x)$

Μονάδες 4

δ) Να βρείτε το $\lim_{x \to 1^+} f(x)$

Μονάδες 4

ε) Να βρείτε τα κ και μ, ώστε να υπάρχουν ταυτόχρονα τα $\lim_{x \to -1} f(x)$ και $\lim_{x \to 1} f(x)$

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, της οποίας η πρώτη παράγωγος έχει τύπο:
$f'(x) = x^2 - 2x$.

α) Να δείξετε ότι $f'(0) = 0$ και $f'(2) = 0$.

Μονάδες 4

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 6

γ) Να βρείτε την $f''(x)$

Μονάδες 6

δ) Για ποιες τιμές του x η f παρουσιάζει ακρότατα και ποιο είναι το είδος των ακρότατων;

Μονάδες 4

ε) Αν $f(0) = 2005$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο

Μια ομάδα βιολόγων προτείνει να ληφθούν μέτρα για τη διάσωση ενός είδους δελφινιών. Μετά την εφαρμογή των μέτρων εκτιμάται ότι ο αριθμός των δελφινιών εκφράζεται από τη συνάρτηση $N(t) = 2t^3 - t^2 + 5t + 1000$, $0 \le t \le 10$, όπου t ο χρόνος σε έτη.

α) Πόσα δελφίνια υπάρχουν κατά την έναρξη εφαρμογής των μέτρων ($t = 0$);

Μονάδες 5

β) Να βρείτε το ρυθμό αύξησης του πληθυσμού των δελφινιών.

Μονάδες 8

γ) Να βρείτε το ρυθμό αύξησης του πληθυσμού των δελφινιών το δεύτερο έτος.

Μονάδες 7

δ) Πόσα δελφίνια θα υπάρχουν σε δέκα (10) έτη;

Μονάδες 5

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

α)

Τιμές x_i	**Συχνότητα** v_i	**Αθροιστική Συχνότητα**	$x_i v_i$
0	11	11	0
1	14	25	14
2	17	42	34
3	5	47	15
4	3	50	12
Αθροίσματα	50		75

β) Η μέση τιμή είναι: $\overline{x} = \frac{1}{50}\sum_{i=0}^{4} x_i v_i = \frac{75}{50} = 1{,}5$.

γ) Η διάμεσος είναι το ημιάθροισμα της $25^{ης}$ και της $26^{ης}$ παρατήρησης.
Έτσι $\delta = \frac{t_{25} + t_{26}}{2} = \frac{1+2}{2} = 1{,}5$.

δ) Το εύρος είναι 4 – 0 = 4.

ΘΕΜΑ 2ο

α) Είναι $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to -1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = \lim\limits_{x\to -1^-}(x+1) = 0$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+}(\kappa x + \mu) = -\kappa + \mu$.

γ) Είναι $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(\kappa x + \mu) = \kappa + \mu$.

δ) Είναι $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(x^2 + 2x + 5 + \ln x) = 1 + 2 + 5 = 8$.

ε) Τα όρια $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ υπάρχουν αν και μόνο αν
$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$, δηλαδή
$0 = -\kappa + \mu \Leftrightarrow \kappa - \mu = 0$ (1).
$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ δηλαδή $\kappa + \mu = 8$ (2).
Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$\left.\begin{matrix}\kappa - \mu = 0\\ \kappa + \mu = 8\end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix}2\kappa = 8\\ \kappa - \mu = 0\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{matrix}\kappa = 4\\ \mu = 4\end{matrix}$$

ΘΕΜΑ 3ο

α) Στον τύπο $f'(x) = x^2 - 2x$ θέτοντας $x = 0$, $x = 2$ παίρνουμε αντίστοιχα

$f'(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 = 0$

$f'(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 = 0$

β) $f'(x) = x^2 - 2x = x(x - 2)$.

Σχηματίζουμε τον πίνακα μεταβολών:

x	$-\infty$ 0	0 2	2 $+\infty$
f'(x)	+	-	+
f(x)	↗	↘	↗

Προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0]$, $[2, +\infty)$ ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, 2]$.

γ) $f''(x) = (x^2 - 2x)' = 2x - 2,\ x \in \mathbb{R}$

δ) Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση $x_1 = 0$, ενώ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση $x_2 = 2$.

ε) Η παράγουσα της $f'(x) = x^2 - 2x$ είναι $\frac{x^3}{3} - x^2 + c,\ c \in \mathbb{R}$.

Οπότε $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + c$.

Όμως $f(0) = 2005$. Άρα $\frac{0^3}{3} - 0^2 + c = 2005 \Leftrightarrow c = 2005$.

Έτσι προκύπτει $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 2005,\ x \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 4ο

α) Ο αριθμός των δελφινιών που υπάρχουν κατά την έναρξη εφαρμογής των μέτρων, δηλαδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι:

$N(0) = 2 \cdot 0^3 - 0^2 + 5 \cdot 0 + 1000 = 1000$.

β) Ο ρυθμός αύξησης των δελφινιών είναι:

$N'(t) = (2t^3 - t^2 + 5t + 1000)' = 6t^2 - 2t + 5$.

γ) Ο ρυθμός αύξησης των δελφινιών το δεύτερο έτος είναι:

$N'(2) = 6 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 5 = 6 \cdot 4 - 4 + 5 = 24 - 4 + 5 = 25.$

δ) Μετά από δέκα (10) χρόνια θα υπάρχουν:

$N(10) = 2 \cdot 10^3 - 10^2 + 5 \cdot 10 + 1000 =$
$= 2 \cdot 1000 - 100 + 50 + 1000 =$
$= 2000 - 50 + 1000 = 2950$ δελφίνια.