

**ΑΛΓΕΒΡΑ**  
**ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**  
**Β' ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**2002**

**ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ 1ο**

- A.** Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο  $u$  της διαίρεσης ενός πολυωνύμου  $P(x)$  με το  $x - \rho$  είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για  $x = \rho$ . Είναι δηλαδή  $u = P(\rho)$ .

**Μονάδες 9**

- B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α.**  $e^x = \theta \Leftrightarrow \ln \theta = x$  ,  $\theta > 0$

**β.** Αν  $a > 0$  με  $a \neq 1$ , τότε για οποιουδήποτε  $\theta_1, \theta_2 > 0$  ισχύει:  
 $\log_a(\theta_1 \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$

**γ.**  $\epsilon\phi 2\alpha = \frac{2\epsilon\phi\alpha}{1 + \epsilon\phi^2\alpha}$

**δ.**  $\eta\mu^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$

**ε.**  $\epsilon\phi(\alpha - \beta) = \frac{\epsilon\phi\alpha + \epsilon\phi\beta}{1 - \epsilon\phi\alpha\epsilon\phi\beta}$  .

**Μονάδες 10**

- Γ.** Πότε μία ακολουθία λέγεται:

**α.** αριθμητική πρόοδος;

**β.** γεωμετρική πρόοδος;

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνονται οι αριθμοί  $a_1 = \sigma\upsilon\nu 2\alpha$  ,  $a_2 = \sigma\upsilon\nu^2\alpha$  ,  $a_3 = 1$ , όπου η γωνία  $\alpha$  ικανοποιεί τη σχέση  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  .

- α.** Να αποδείξετε ότι αυτοί οι αριθμοί, με τη σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

**Μονάδες 7**

- β.** Να βρείτε τη διαφορά  $\omega$  αυτής της προόδου.

**Μονάδες 8**

- γ.** Να βρείτε το άθροισμα των πέντε πρώτων όρων της προόδου.

**Μονάδες 10**

### ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = kx^3 - (k + \lambda)x^2 + \lambda x + 1$ .

α. Αν  $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 7$  και  $P(-1) = 23$ , να αποδείξετε ότι  $k = -6$  και  $\lambda = -5$ .

**Μονάδες 8**

β. Να γίνει η διαίρεση του  $P(x)$ , για  $k = -6$  και  $\lambda = -5$ , με το πολυώνυμο  $2x + 1$  και να γραφεί το  $P(x)$  με την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης.

**Μονάδες 8**

γ. Να λυθεί η ανίσωση  $P(x) > 7$  για  $k = -6$  και  $\lambda = -5$ .

**Μονάδες 9**

### ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln\left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x + 5}\right)$ .

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f(x)$ .

**Μονάδες 5**

β. Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 2\ln 2$ .

**Μονάδες 10**

γ. Να λύσετε την ανίσωση  $f(x) > 0$ .

**Μονάδες 10**

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

### ΘΕΜΑ 1ο

**A.** Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 67.

**B.**

$\alpha$	$\Sigma$
$\beta$	$\Lambda$
$\gamma$	$\Lambda$
$\delta$	$\Sigma$
$\epsilon$	$\Lambda$

**Γ. α.** Μια ακολουθία λέγεται αριθμητική πρόοδος, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού.

**β.** Μια ακολουθία λέγεται γεωμετρική πρόοδος, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πολ/σμό επί τον ίδιο πάντοτε μη μηδενικό αριθμό.

### ΘΕΜΑ 2ο

**α.** Οι αριθμοί  $a_1, a_2, a_3$  αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής πρόοδου όταν  $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$  ή  $\text{συν}^2\alpha = \frac{1 + \text{συν}2\alpha}{2}$  που ισχύει.

**β.**  $\omega = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = 1 - \text{συν}^2\alpha = \eta\mu^2\alpha$

**γ.**

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 &= \frac{5}{2}[2\alpha_1 + (5-1)\omega] = \\ &= \frac{5}{2}(2\text{συν}2\alpha + 4\eta\mu^2\alpha) = \frac{5}{2}[2(1 - 2\eta\mu^2\alpha) + 4\eta\mu^2\alpha] = \\ &= \frac{5}{2}(2 - 4\eta\mu^2\alpha + 4\eta\mu^2\alpha) = \frac{5}{2} \cdot 2 = 5. \end{aligned}$$

### ΘΕΜΑ 3ο

**α.** Με αντικατάσταση στο πολυώνυμο  $P(x)$  των τιμών του  $x = -\frac{1}{2}$  και  $x = -1$  παίρνουμε το ακόλουθο σύστημα:

$$\begin{cases} \kappa\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - (\kappa + \lambda)\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \lambda\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 7 \\ \kappa(-1)^3 - (\kappa + \lambda)(-1)^2 + \lambda(-1) + 1 = 23 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{8}\kappa - (\kappa + \lambda)\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\lambda + 1 = 7 \\ -\kappa - (\kappa + \lambda) - \lambda + 1 = 23 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\kappa - 2(\kappa + \lambda) - 4\lambda + 8 = 56 \\ -\kappa - \kappa - \lambda - \lambda + 1 = 23 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\kappa - 2\kappa - 2\lambda - 4\lambda = 48 \\ -2\kappa - 2\lambda = 22 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3\kappa - 6\lambda = 48 \\ -2\kappa - 2\lambda = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa + 2\lambda = -16 \\ \kappa + \lambda = -11 \end{cases}$$

Η λύση του συστήματος είναι  $(\kappa, \lambda) = (-6, -5)$ .

**β.** Το  $P(x)$  για τις τιμές  $\kappa = -6$  και  $\lambda = -5$  γράφεται:

$$P(x) = -6x^3 - (-11)x^2 - 5x + 1 = -6x^3 + 11x^2 - 5x + 1$$

$-6x^3 + 11x^2 - 5x + 1$	$2x + 1$
$+ 6x^3 + 3x^2$	$-3x^2 + 7x - 6$
$14x^2 - 5x + 1$	
$- 14x^2 - 7x$	
$- 12x + 1$	
$+ 12x + 6$	
$7$	

$$\text{Άρα: } -6x^3 + 11x^2 - 5x + 1 = (2x + 1)(-3x^2 + 7x - 6) + 7$$

**γ.** Η ανίσωση  $P(x) > 7$  γράφεται:

$$\begin{aligned} (2x + 1)(-3x^2 + 7x - 6) + 7 &> 7 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (2x + 1)(-3x^2 + 7x - 6) &> 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (2x + 1)(3x^2 - 7x + 6) &< 0. \end{aligned}$$

Όμως  $3x^2 - 7x + 6 > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , αφού  
 $\Delta = 49 - 72 = -23 < 0$ .

Επομένως η ανίσωση τελικά γίνεται:  $2x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$ .

#### ΘΕΜΑ 4ο

**α.** Το πεδίο ορισμού της  $f(x)$  είναι το σύνολο

$$\{x \in \mathbb{R}: e^x + 5 \neq 0 \text{ και } \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 5} > 0\}.$$

Όμως  $e^x + 5 > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , οπότε η  $e^x + 5 \neq 0$  ισχύει για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\text{ενώ η } \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 5} > 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{2x} > 1 \Leftrightarrow e^{2x} > e^0.$$

Όμως η συνάρτηση  $g(x) = e^x$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$  (1).  
 Οπότε  $2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$ .

Άρα το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι  $A = (0, +\infty)$ .

$$\beta. \quad f(x) = 2 \ln 2 \Leftrightarrow \ln \left( \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 5} \right) = \ln 2^2 \stackrel{\ln x(1-1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{e^{2x} - 1}{e^x + 5} = 4 \Leftrightarrow e^{2x} - 1 = 4e^x + 20 \Leftrightarrow e^{2x} - 4e^x - 21 = 0.$$

Αν θέσουμε  $e^x = y > 0$  η τελευταία γίνεται:

$$y^2 - 4y - 21 = 0 \Leftrightarrow (y = -3 \text{ απορρίπτεται ή } y = 7).$$

$$\text{Άρα } e^x = 7 \Leftrightarrow \ln 7.$$

$$\gamma. \quad f(x) > 0 \Leftrightarrow \ln \left( \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 5} \right) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\ln \left( \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 5} \right) > \ln 1 \stackrel{\ln x(1-1)}{\Leftrightarrow} \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 5} > 1 \stackrel{e^x + 5 > 0}{\Leftrightarrow}$$

$$e^{2x} - 1 > e^x + 5 \Leftrightarrow e^{2x} - e^x - 6 > 0.$$

Αν θέσουμε  $e^x = y > 0$  η τελευταία γράφεται:

$$y^2 - y - 6 > 0 \Leftrightarrow (y - 3) \cdot (y + 2) > 0 \stackrel{y > 0}{\Leftrightarrow} y - 3 > 0 \Leftrightarrow y > 3.$$

$$\text{Δηλαδή } e^x > 3 \Leftrightarrow e^x > e^{\ln 3} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} x > \ln 3.$$