Θέματα Άλγεβρας
Γενικής Παιδείας
Β΄ Λυκείου 1999

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

Ζήτημα 1ο

Α. Έστω P(x) ένα πολυώνυμο του x και ρ ένας πραγματικός αριθμός. Αν π(x) είναι το πηλίκο και υ(x) το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με το πολυώνυμο (x - ρ), τότε:

α) Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του P(x) με το (x - ρ).
(Μονάδες 2,5)

β) Το υπόλοιπο υ(x) είναι:
Α. Πάντοτε πολυώνυμο ίδιου βαθμού με το P(x).
Β. Πολυώνυμο πρώτου βαθμού.
Γ. Σταθερό πολυώνυμο.
Δ. Πάντοτε το μηδενικό πολυώνυμο.
(Μονάδες 5)

γ) Να δείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με το (x - ρ) είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για x = ρ. Είναι δηλαδή υ = P(ρ).
(Μονάδες 5)

Β. Έστω το πολυώνυμο $P(x) = k^2 x^3 - 3kx^2 + kx + 1$, όπου k πραγματικός αριθμός. Για ποια από τις παρακάτω τιμές του k το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το (x - 1) είναι ίσο με το μηδέν;

Α. k = 0
Β. k = -1
Γ. k = 1
Δ. k = 2
Ε. k = -2
(Μονάδες 12,5)

Ζήτημα 2ο

Έστω γεωμετρική πρόοδος της οποίας ο τρίτος όρος είναι ίσος με 16 και ο έκτος είναι ίσος με 2.

α) Ο πρώτος όρος $α_1$ και ο λόγος λ της γεωμετρικής προόδου είναι:

Α. $α_1 = 64$ και $λ = -1/2$ Β. $α_1 = -64$ και $λ = -1/2$
Γ. $α_1 = 64$ και $λ = 1/2$ Δ. $α_1 = 32$ και $λ = 1/2$
(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τον δέκατο όρο της γεωμετρικής προόδου.
(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το άθροισμα των άπειρων όρων της γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 7)

Ζήτημα 3ο

α) Να αποδείξετε ότι: ημ6x + ημ4x = 2ημ5x • συνx.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση: ημ6x + ημ4x + 4ημ5x = 0.

(Μ0νάδες 15)

Ζήτημα 4ο

Η τιμή αγοράς ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή είναι μεγαλύτερη από 620 χιλιάδες δραχμές και μικρότερη από 640 χιλιάδες δραχμές. Κατά την αγορά συμφωνήθηκαν τα εξής:

Να δοθεί προκαταβολή 120 χιλιάδες δραχμές.
Η εξόφληση του υπόλοιπου ποσού να γίνει σε 10 μηνιαίες δόσεις.
Κάθε δόση να είναι μεγαλύτερη από την προηγούμενη κατά ω χιλιάδες δραχμές, όπου ω θετικός ακέραιος.
Η τέταρτη δόση να είναι 48 χιλιάδες δραχμές.

α) Να εκφράσετε το ποσό της πρώτης δόσης ως συνάρτηση του ω.

(Μονάδες 5)

β) Να εκφράσετε την τιμή αγοράς ως συνάρτηση του ω.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την τιμή του ω.

(Μονάδες 5)

δ) Να βρείτε το ποσό της τελευταίας δόσης.

(Μονάδες 5)

ε) Να βρείτε την τιμή αγοράς του ηλεκτρονικού υπολογιστή.

(Μονάδες 5)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Ζήτημα 1ο

Α.1.

α) Η ταυτότητα της διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με το πολυώνυμο (x - ρ) είναι:

$$P(x) = (x - \rho)\pi(x) + \upsilon(x)$$

β) Σωστή είναι η απάντηση Γ, γιατί ο διαιρέτης (x − ρ) είναι πρώτου βαθμού.

γ) Από την ταυτότητα της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το δυώνυμο x − ρ έχουμε:

$$P(x) = (x - \rho)\pi(x) + \upsilon(x)$$

Επειδή ο διαιρέτης (x − ρ) είναι πολυώνυμο πρώτου βαθμού, το υπόλοιπο της διαίρεσης υ(x) είναι ένα σταθερό πολυώνυμο. Έτσι, έχουμε:

$$P(x) = (x - \rho)\pi(x) + \upsilon(x) \qquad (1)$$

Αντικαθιστούμε στην (1) όπου x = ρ και έχουμε:

$$(P(\rho) = (\rho - \rho)\pi(\rho) + \upsilon \iff P(\rho) = 0 \bullet \pi(\rho) + \upsilon \iff \mathbf{P(\rho) = \upsilon}$$

Α.2. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με το (x - 1) είναι:

$$\begin{aligned} \upsilon = P(1) &= \kappa^2 \bullet 1^3 - 3\kappa \bullet 1^2 + \kappa \bullet 1 + 1 = \\ &= \kappa^2 - 3\kappa + \kappa + 1 = \\ &= \kappa^2 - 2\kappa + 1 \end{aligned}$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι:

υ = 0 ή
P(1) = 0

Άρα: $\kappa^2 - 2\kappa + 1 = 0 \iff (\kappa - 1)^2 = 0 \iff \kappa = 1$

Επομένως, η σωστή απάντηση είναι Γ.

Ζήτημα 2ο

α) Από την εκφώνηση έχουμε ότι:

$$\left.\begin{aligned} a_3 &= 16 \\ a_6 &= 2 \end{aligned}\right\} \iff \left.\begin{aligned} a_1 \cdot \lambda^2 &= 16 \\ a_1 \cdot \lambda^5 &= 2 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} (1) \\ (2) \end{aligned}$$

Διαιρώντας τις σχέσεις (1) και (2) κατά μέλη βρίσκουμε ότι:

$$1/\lambda^3 = 8 \iff \lambda^3 = 1/8 \iff \boldsymbol{\lambda = 1/2}$$

Άρα:

$$\alpha_1 \bullet \lambda^2 = 16 \;\Leftrightarrow\; \alpha_1 \bullet 1/4 = 16 \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{\alpha_1 = 64}$$

Επομένως, σωστή είναι η απάντηση Γ.

β) Ο δέκατος όρος της γεωμετρικής προόδου είναι:

$$\alpha_{10} = \alpha_1 \cdot \lambda^9 = 64 \cdot (1/2)^9 = 2^6 \frac{1}{2^9} = \frac{1}{2^3}$$

$$\text{Άρα}: \quad \alpha_{10} = \frac{1}{8}$$

γ) Επειδή είναι $|\lambda| = |1/2| < 1$, το άθροισμα S των άπειρων όρων της γεωμετρικής προόδου δίνεται από τον τύπο:

$$S = \frac{\alpha_1}{1-\lambda} = \frac{64}{1-(1/2)} = \frac{64/1}{1/2} \Leftrightarrow S = 128$$

Ζήτημα 3ο

α) Γνωρίζουμε ότι:

$$\eta\mu A + \eta\mu B = 2\eta\mu(A + B)/2\ \sigma\upsilon\nu(A - B)/2$$

Επομένως για $A = 6x$ και $B = 4x$ έχουμε:

$$\eta\mu 6x + \eta\mu 4x = 2\eta\mu\ (6x + 4x)/2\ \sigma\upsilon\nu\ (6x + 4x)/2 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \eta\mu 6x + \eta\mu 4x = 2\eta\mu\ (10x)/2\ \sigma\upsilon\nu\ (2x)/2 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \eta\mu 6x + \eta\mu 4x = 2\eta\mu(10x)/2\ \sigma\upsilon\nu(2x)/2 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \boldsymbol{\eta\mu 6x + \eta\mu 4x = 2\eta\mu 5x\sigma\upsilon\nu x}$$

β) Έχουμε:

$\eta\mu 6x + \eta\mu 4x + 4\eta\mu 5x = 0 \;\Leftrightarrow\; 2\eta\mu 5x\sigma\upsilon\nu x + 4\eta\mu 5x = 0 \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; 2\eta\mu 5x(\sigma\upsilon\nu x + 2) = 0 \qquad (1)$

Από την ισότητα (1) προκύπτει ότι:

i) $\sigma\upsilon\nu x + 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; \sigma\upsilon\nu x = -2$ (αδύνατη)

ii) $\eta\mu 5x = 0 \;\Leftrightarrow\; \eta\mu 5x = \eta\mu 0 \;\Leftrightarrow\; 5x = 2\kappa\pi$ ή $5x = 2\kappa\pi + \pi \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\; 5x = 2\kappa\pi$ ή $5x = (2\kappa + 1)\pi \;\Leftrightarrow\; 5x = \kappa\pi \Leftrightarrow x = (\kappa\pi)/5$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Ζήτημα 4ο

Αν Α είναι η τιμή αγοράς του Η/Υ και Β το οφειλόμενο υπόλοιπο, τότε θα έχουμε ότι: $A = 120 + B$ σε χιλ. δρχ.
Έστω τώρα α_1 η πρώτη δόση, α_2 η δεύτερη δόση, …, και α_{10} η δέκατη δόση. Τότε θα έχουμε:
α_1
$\alpha_2 = \alpha_1 + \omega$
………………..
$\alpha_{10} = \alpha_9 + \omega$

δηλαδή μια αριθμητική πρόοδο με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω.

α) Το ποσό της πρώτης δόσης είναι ο πρώτος όρος α_1 της αριθμητικής προόδου. Από την υπόθεση έχουμε ότι $\alpha_4 = 48$ χιλιάδες δρχ. Επομένως:

$$\alpha_4 = \alpha_1 + 3\omega \Leftrightarrow 48 = \alpha_1 + 3\omega \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha_1 = 48 - 3\omega} \textbf{ χιλιάδες δρχ.}$$

β) Έστω Α χιλιάδες δρχ. η τιμή αγοράς του υπολογιστή. Η τιμή αγοράς Α θα είναι ίση με $A = 120 + S_{10}$ χιλιάδες δρχ., όπου S_{10} είναι το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου (δηλαδή το άθροισμα των 10 δόσεων) και το 120 είναι οι 120 χιλιάδες δρχ. που δώσαμε ως προκαταβολή. Άρα:

$$A = 120 + S_{10} \Leftrightarrow A = 120 + (10/2)(2\alpha_1 + 9\omega) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A = 120 + 5(2\alpha_1 + 9\omega) \Leftrightarrow A = 120 + (10\alpha_1 + 45\omega) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A = 120 + 10(48 - 3\omega) + 45\omega \Leftrightarrow A = 120 + 480 - 30\omega + 45\omega \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{A = 600 + 15\omega} \textbf{ χιλιάδες δρχ.}$$

γ) Επειδή η τιμή της αγοράς του υπολογιστή είναι μεγαλύτερη από 620 χιλιάδες δρχ. και μικρότερη από 640 χιλιάδες δρχ. θα έχουμε ότι:

$$620 < A < 640 \Leftrightarrow 620 < 600 + 15\omega < 640 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 620 - 600 < 15\omega < 640 - 600 \Leftrightarrow 20 < 15\omega < 40 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{20}{15} < \frac{15\omega}{15} < \frac{40}{15} \Leftrightarrow 1{,}\overline{3} < \omega < 2{,}\overline{6}$$

Και επειδή ο ω είναι ακέραιος, προκύπτει ότι:

$$\boldsymbol{\omega = 2} \textbf{ χιλιάδες δρχ.}$$

δ) Η τελευταία δόση είναι η δέκατη, δηλαδή ο δέκατος όρος α_{10} της αριθμητικής προόδου θα είναι:

$$\alpha_{10} = \alpha_1 + 9\omega \Leftrightarrow \alpha_{10} = 48 - 3\omega + 9\omega \Leftrightarrow \alpha_{10} = 48 + 6\omega \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha_{10} = 48 + 6 \bullet 2 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha_{10} = 60} \textbf{ χιλιάδες δρχ.}$$

ε) Επειδή είναι ω = 2 χιλιάδες δρχ., έχουμε:

$$A = 600 + 15\omega \Leftrightarrow A = 600 + 15 \bullet 2 \Leftrightarrow A = 600 + 30 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{A = 630} \textbf{ χιλιάδες δρχ.}$$